

**Thetafunktionen und multiplikative
automorphe Funktionen
zu vorgegebenen Divisoren
in komplexen Mannigfaltigkeiten**

Konrad Königsberger

1960

Thetafunktionen und multiplikative
automorphe Funktionen zu vorgegebenen

Divisoren in komplexen Mannigfaltigkeiten

Inauguraldissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Ludwig-Maximilians-Universität

zu München

Vorgelegt

von

Konrad Königsberger

aus

Deggenau

Juni 1960

Transformationen und Multiplikative
asymmetrische Funktionen zu vorgesehener
Divisionen in komplexen Mannigfaltigkeiten

Inauguraldissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Leibniz-Universität



Berichterstatter: Professor Dr. K. Stein
Tag der mündlichen Prüfung: 27. 7. 1960

VON

Konrad Königsberger

aus

Worms

Juni 1960

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Teil I : Kohomologietheorie von Gruppen	11
1. Die Gruppen $H^n(Q, G)$	11
2. Der Ring $H(Q, G)$	19
3. Folgen und Reihen von Koketten	22
4. Genauere Diskussion der 2-dimensionalen Kozykeln und Kohomologieklassen	26
5. Die Bedeutung der Gruppen $H^2(\pi, G)$ in der Topologie	42
Teil II : Formulierung und Beweis der Hauptsätze	46
6. Formulierung und Reduktion des Problems	46
7. Die Kohomologieklassen $h_0(D)$ und $h(D)$..	54
8. Formulierung und Beweis der Hauptsätze	59
Teil III : Folgerungen	68
9. Anwendungen des Satzes I	68
10. Thetafunktionen und multiplikative automorphe Funktionen zu Divisoren in Produkten Steinscher Mannigfaltigkeiten	71
11. Geometrische Interpretationen der Hauptsätze	78
Literaturverzeichnis	89

Einleitung

P. Cousin bewies 1895 die Existenz eindeutiger holomorpher Funktionen zu beliebigen lokal vorgegebenen Nullstellenflächen in gewissen Gebieten des C^n . Doch scheitert sein Beweisverfahren bereits in Zylindergebieten mit wenigstens zwei nicht einfach zusammenhängenden Projektionen. In der Tat konnte Gronwall 1917 die Ungültigkeit der Cousinschen Aussage für solche Zylindergebiete nachweisen. Damit war die Aufgabe gestellt, diejenigen Verteilungen V von Nullstellenflächen in einem Gebiet G des C^n (man spricht auch von Cousin-Verteilungen 2. Art) zu charakterisieren, welche eindeutige holomorphe Lösungsfunktionen zulassen. Für den Fall, dass G ein Holomorphiegebiet ist, wurde dieses Problem 1939 von Oka (12) auf ein topologisches zurückgeführt. Er bewies nämlich, dass zu einer Verteilung V stets dann auch eine eindeutige holomorphe Funktion gefunden werden kann, wenn es eine stetige Lösungsfunktion gibt.

Bedingungen topologischer Art für die Lösbarkeit einer Cousin-Verteilung V in einem Holomorphiegebiet G wurden zuerst 1939 von K. Stein (14) angegeben. Er bewies: Eine gesuchte Funktion existiert höchstens dann, wenn die Schnittzahlen der Verteilung V mit den 2-dimensionalen Zykeln mod m ($m=0,1,2,\dots$) in G sämtlich verschwinden. Ist die erste Bettigruppe von G eine

freie abelsche Gruppe, so reicht diese Bedingung für die Existenz einer stetigen und damit nach Oka auch für die Existenz einer eindeutigen holomorphen Lösungsfunktion hin. Ebenfalls von K. Stein wurden dann 1950 mit Hilfe einer weiteren topologischen Invarianten sämtliche durch eindeutige holomorphe Funktionen lösbaren Cousin-Verteilungen 2. Art in einem Holomorphiegebiet vollständig charakterisiert (14b).

Fast zur gleichen Zeit wandte H. Cartan die Theorie der Faserräume auf das verallgemeinerte Cousinproblem an, bei dem zu vorgeschriebenen Null- und Polstellenflächen in einer komplexen Mannigfaltigkeit X (kurz: "Divisoren") eindeutige meromorphe Funktionen gesucht werden. Ein vorgegebener Divisor D definiert ein komplex-analytisches Prinzipalfaserbündel E über X mit C^* als Faser. Die Existenz einer gesuchten Lösungsfunktion zu D ist dann gleichwertig mit der Existenz eines analytischen Schnittes in E . Wann ein stetiger Schnitt existiert, kann nach den Sätzen der Theorie der Faserräume genau beantwortet werden: Notwendig und hinreichend hierzu ist das Verschwinden des charakteristischen Kohomologieelementes $h(D) \in H^2(X, \mathbb{Z})$, das durch den Faserraum E definiert wird. Demnach ist ein Divisor D nur dann lösbar, wenn $h(D)$ Null ist. Ist X ein Holomorphiegebiet, so kann aus der Existenz eines stetigen Schnittes in E sogar auf die Existenz eines analytischen Schnittes geschlossen werden (es ist das eine Verallgemeinerung des oben

angeführten Satzes von Oka). " $h(D) = 0$ " reicht also auch für die Existenz einer gesuchten meromorphen Funktion hin, wenn X Holomorphiegebiet im C^n ist.

Besonders übersichtlich und erfolgreich konnte das verallgemeinerte Cousinproblem 1952 von J.P. Serre mit den Mitteln der Garbentheorie behandelt werden. Dabei stellte es sich heraus, dass die zuletzt angegebene Bedingung " $h(D) = 0$ " für eine umfangreichere Klasse komplexer Mannigfaltigkeiten die Existenz gesuchter Funktionen sichert. Und zwar ist das Verschwinden von $h(D)$ hinreichend für alle Mannigfaltigkeiten X , deren erste Kohomologiegruppe mit Werten in der Garbe der Keime holomorpher Funktionen die Nullgruppe ist. (Exposé XX in (1a)). (Auf Grund des Theorems B von Cartan - Serre haben alle Steinschen Mannigfaltigkeiten, also insbesondere die Holomorphiegebiete die Eigenschaft $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$).

Als Lösungsfunktionen von Cousin-Verteilungen spielen neben den eindeutigen Funktionen auch gewisse mehrdeutige eine wichtige Rolle (jedenfalls immer dann, wenn das Kohomologieelement eines Divisors nicht Null ist). Das zeigte sich zum ersten Mal, als K. Stein 1941 in seiner Habilitationsschrift (14) dem Ergebnis von Gronwall die folgende positive Aussage gegenüberstellte: Eine Cousin-Verteilung in einem Zylindergebiet $Z = Z_1 \times \dots \times Z_n$ hat dort stets eine holomorphe multiplikative automorphe Lösungsfunktion, selbst dann, wenn nicht sämtliche charakteristischen

Schnittzahlen Null sind. Dabei versteht man unter einer multiplikativen automorphen Funktion auf Z eine eindeutige holomorphe Funktion auf der universellen Überlagerung $\hat{Z}$ von Z , die beim Fortsetzen längs eines geschlossenen Weges in Z einen auf Z eindeutigen Faktor $e^{\varphi(z)}$ aufnimmt. (Im vorliegenden Fall lassen sich sogar Lösungsfunktionen finden, deren Mehrdeutigkeitverhalten dem der Weierstrass'schen Primfunktionen ähnlich ist.) - Stein verallgemeinerte diesen Satz später auf direkte Produkte offener Riemannschen Flächen (vgl. (14a)).

Analoge Funktionen wurden in einem ganz anderen Fall betrachtet: Zur Lösung von Divisoren in einer kompakten Kähler-Mannigfaltigkeit X verwandte K.Kodaira die von ihm eingeführten verallgemeinerten Thetafunktionen. Das sind eindeutige holomorphe Funktionen auf der universellen Überlagerung $\hat{X}$ von X , die bei Ausüben einer Decktransformation einen Faktor $e^{\varphi(z)}$ aufnehmen, wobei φ ein Integral 1. Gattung auf X ist. (Die klassischen Thetafunktionen beziehen sich auf Tori. Die φ sind dann lineare Funktionen im C^n . Die Brauchbarkeit dieser Funktionen zeigt der folgende Satz, den K.Kodaira mit Mitteln der Theorie der harmonischen Integrale bewies: Zu einem Divisor D in einer kompakten Kähler-Mannigfaltigkeit X der reellen Dimension $2n$ existiert stets dann eine Thetafunktion, wenn D homolog zu einer Summe von Schnitten von je zwei $(2n-1)$ -dimensionalen Zykeln in X ist (vgl. (9

Anders ausgedrückt: Zu einem Divisor D gibt es immer dann eine Thetafunktion, wenn das reellzahlige Kohomologieelement $H(D) \in H^2(X, \mathbb{R})$ ($H(D)$ sei das Bild von $h(D)$ unter dem Homomorphismus $H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{R})$) Summe von Produkten von 1-dimensionalen Kohomologieklassen aus $H^1(X, \mathbb{R})$ ist. Eine ähnliche notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Thetafunktion zu einem Divisor in einer kompakten Kähler-Mannigfaltigkeit bewies kurz darauf Dolbeault unter Verwendung der Theorie der harmonischen Differentialformen (Exposé II in (1a)).

Diese Ergebnisse motivieren die Frage nach genauen Bedingungen, unter denen ein Divisor in einer komplexen Mannigfaltigkeit durch eine multiplikative automorphe Funktion oder eine Thetafunktion gelöst werden kann. In solcher Allgemeinheit wurde dieses Problem zum ersten Mal von P. Dolbeault 1954 im Anschluss an seine Untersuchungen über die Existenz geschlossener meromorphen Differentialformen zu vorgegebenen Singularitäten behandelt. Als Anwendung seiner Hauptsätze formuliert er mit Hilfe der C^∞ -Differentialformen hinreichende Bedingungen für die Existenz gesuchter Thetafunktionen. Unter zusätzlichen Voraussetzungen über die Mannigfaltigkeit X sind diese Bedingungen auch notwendig. Ist X insbesondere eine Steinsche Mannigfaltigkeit, deren erste Betti-Gruppe endliche Dimension hat, so besagt sein Ergebnis: Zu einem Divisor D in X existiert genau dann eine Thetafunktion, wenn die komplexe Kohomologieklass $H_c(D)$

als Summe von Produkten geschlossener C^∞ -Differentialformen vom Grad 1 darstellbar ist.

In der vorliegenden Arbeit versuchen wir nun ebenfalls die oben aufgeworfene Frage zu beantworten. Dabei sind wir von vorneherein um solche Kriterien bemüht, deren Formulierung und Beweis auf komplexe Räume ausgedehnt werden können. Vor allem vermeiden wir die Technik der Differentialformen völlig, da sie nur auf komplexen Räumen ohne Singularitäten zur Verfügung steht. Dagegen benützen wir als wesentliches Hilfsmittel die Kohomologie der Fundamentalgruppe. Wir führen die Untersuchungen zwar nur für Mannigfaltigkeiten mit abzählbarer Basis durch (im folgenden erinnern wir nicht mehr ausdrücklich an diese Voraussetzung), da dies für die beabsichtigten Anwendungen ausreicht. Doch gelten die Kriterien samt Beweis mutatis mutandis auch für komplexe Räume. - Zur Charakterisierung der fraglichen Divisoren benützen wir deren reelle Kohomologieelemente. Wir zeigen: Notwendig für die Existenz einer Thetafunktion zu einem Divisor D ist die Darstellbarkeit von $H(D)$ als "Reihe" von Produkten von Kohomologieklassen aus $H^1(X, R)$:

$$H(D) = \sum_{\mu=1}^{\infty} h_{\mu}^1 \cup k_{\mu}^1$$

(Solche Kohomologieelemente nennen wir kurz: "zerfallend"). Soll D sogar durch eine multiplikative automorphe Funktion lösbar sein, so müssen die h_{μ}^1 und k_{μ}^1 aus dem Bild von $H^1(X, Z) \rightarrow H^1(X, R)$ ausgewählt werden können. Beide Bedingungen sind auch hinreichend,

wenn $H^1(X, \mathcal{O})$ und $H^1(\hat{X}, \mathcal{O})$ Null sind ($\hat{X}$ sei die universelle Überlagerung von X) (Satz I und II). Insbesondere sind damit also notwendige und zugleich hinreichende Bedingungen rein topologischer Art für die Existenz von Thetafunktionen bzw. multiplikativen automorphen Funktionen zu Divisoren in beliebigen Steinschen Mannigfaltigkeiten angegeben (dabei gelten diese Kriterien auch für Steinsche Mannigfaltigkeiten, deren erste Bettigruppe nicht endlich erzeugt ist).

Die zerfallenden Kohomologieelemente in $H^2(X, \mathbb{R})$ liegen sämtlich in der Untergruppe $H^2(\pi_1(X), \mathbb{R})$, dem Kern des Homomorphismus $H^2(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^2(\hat{X}, \mathbb{R})$. Daher hängt es in starkem Mass von der Struktur der Fundamentalgruppe ab, ob ein Divisor, der auf der universellen Überlagerung lösbar ist, sogar durch eine Thetafunktion oder eine multiplikative automorphe Funktion gelöst werden kann. Als Beispiel sei erwähnt: Ist die Fundamentalgruppe einer komplexen Mannigfaltigkeit X mit $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ abelsch, so gibt es zu einem Divisor D auf X genau dann eine multiplikative automorphe Lösungsfunktion, wenn D auf der universellen Überlagerung gelöst werden kann (Satz III). Ferner gilt für eine Steinsche Mannigfaltigkeit X die schärfere Aussage: Ob sämtliche Divisoren in X , die auf der universellen Überlagerung $\hat{X}$ lösbar sind, sogar durch Thetafunktionen oder multiplikative automorphe Funktionen gelöst werden können, hängt allein von der Struktur der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ ab.

Unter Benützung der eingangs zitierten Aussage von Oka gewinnt man aus dem Beweis von Satz I: Dann und nur dann besitzt ein Divisor D in einer Steinschen Mannigfaltigkeit eine holomorphe Thetafunktion (multiplikative automorphe Funktion) als Lösung, wenn es zu D eine stetige Thetafunktion (multiplikative automorphe Funktion) gibt.

Verfolgt man den zum Beweis des Satzes I eingeschlagenen Weg weiter, so gelingt eine Verallgemeinerung eines oben angedeuteten Resultates von K.Stein. Im einfachsten Fall lautet das Ergebnis: Wenn alle Divisoren in den Steinschen Mannigfaltigkeiten X und Y durch Thetafunktionen (multiplikative automorphe Funktionen) lösbar sind, dann existiert zu jedem Divisor in $X \times Y$ ebenfalls eine Thetafunktion (multiplikative automorphe Funktion). Lassen alle Divisoren in X und Y sogar eindeutige Lösungsfunktionen zu, so kann jeder Divisor in $X \times Y$ durch eine multiplikative automorphe Funktion gelöst werden, die hinsichtlich der Variablen $x \in X$ (bei festgehaltenem $y \in Y$) eindeutig ist und in Bezug auf die Veränderliche $y \in Y$ (x sei fest) eine multiplikative automorphe Funktion darstellt, deren Periodizitätsmoduln Funktionen von x allein sind (Satz VII). Das Mehrdeutigkeitsverhalten der Logarithmen dieser Periodizitätsmoduln steht in enger Beziehung zum Schnittverhalten des Divisors in $X \times Y$ mit den Torusflächen $w' \times w'' \subset X \times Y$ (w' und w'' seien geschlossene Wege in X bzw. Y) (vgl. 11.8).

Die Darstellbarkeit des Kohomologieelementes $H(D)$ eines Divisors D durch eine Reihe von Produkten 1-dimensionalen Kohomologieklassen lässt sich geometrisch interpretieren: Sie ist gleichwertig damit, dass die Schnittzahlen des Divisors mit den 2-Sphären und denjenigen 2-dimensionalen Zykeln in X verschwinden, die einen stetigen Homotopierand der Gestalt

$a_1 k_1 a_1^{-1} k_1^{-1} \dots a_r k_r a_r^{-1} k_r^{-1}$ haben. Dabei sei k_i ein Kommutatorweg $b_i c_i b_i^{-1} c_i^{-1}$. (Die a_i , b_i und c_i seien geschlossene Wege in X .)

Hieraus folgt: Ein Divisor D in X , der auf der Homologieüberlagerung von X eine eindeutige Lösungsfunktion zulässt, kann im allgemeinen noch nicht durch eine Thetafunktion gelöst werden. -

Eine weitere geometrische Interpretation erhält man auf Grund der Dualitätsbeziehungen zwischen Homologie- und Kohomologiegruppen. Es gilt: $H(D)$ zerfällt genau dann, wenn D als (abzählbare) Vereinigung von Schnitten je zweier $(2n-1)$ -dimensionalen rationalzahligen Zykeln 2. Art in X dargestellt werden kann (vgl. das hinreichende Kriterium Kodairas für kompakte Kähler-Mannigfaltigkeiten). Nach Hopf (7) lässt sich dann mit Hilfe der 1-dimensionalen Kohomologieklassen h_μ^1 und k_μ^1 einer Darstellung $H(D) = \sum h_\mu^1 \cup k_\mu^1$ angeben, die die Berechnung der Schnittzahlen von D mit allen 2-dimensionalen Zykeln in X ermöglicht. Aus dieser Formel folgt eine Vervollständigung der Resultate über die Lösbarkeit von

Divisoren im direkten Produkt Steinscher Mannigfaltigkeiten X und Y , in denen jeder Divisor durch eine eindeutige Funktion gelöst werden kann. Es gilt:
Ein Divisor in $X \times Y$ lässt genau dann eine eindeutige Lösungsfunktion zu, wenn seine Schnittzahlen mit den Torusflächen $w' \times w'' \subset X \times Y$ sämtlich verschwinden (Satz X_a).

Herrn Professor Dr. K. Stein danke ich für die wertvollen Anregungen, mit denen er die vorliegende Arbeit gefördert hat.

Teil I

KOHOMOLOGIETHEORIE VON GRUPPEN

Ziel der drei ersten Paragraphen dieses Kapitels ist die Zusammenstellung der später benötigten Begriffe und Sätze aus der Kohomologietheorie von Gruppen. In Paragraph 4 werden einige speziellere Aussagen über die Struktur von Elementen der zweiten Kohomologiegruppe mit Werten in gewissen Ringen bewiesen. Paragraph 5 handelt von Zusammenhängen mit Homologie- und Kohomologiegruppen von Räumen.

§ 1 Die Gruppen $H^n(Q, G)$

1.1 Q sei eine beliebige (multiplikativ geschriebene) Gruppe und G eine abelsche (additiv geschriebene) Gruppe mit Q als Gruppe von Linksoperatoren. Unter einer n -Kokette f^n ($n \geq 1$) verstehen wir eine Funktion, die jedem n -Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ von Elementen x_i aus Q ein Element $f^n(x_1, \dots, x_n)$ aus G zuordnet. Die Summe zweier Koketten f^n und g^n ist die durch

$$(f^n + g^n)(x_1, \dots, x_n) = f^n(x_1, \dots, x_n) + g^n(x_1, \dots, x_n)$$

definierte Kokette. Mit dieser Addition als Verknüpfung bildet die Gesamtheit aller n -Koketten eine abelsche Gruppe $C^n(Q, G)$ oder kurz C^n .

1.2 Der Korandhomomorphismus $\delta: C^n(Q, G) \rightarrow C^{n+1}(Q, G)$ ist folgendermassen definiert:

$$\begin{aligned}\delta f^n(x_1, \dots, x_{n+1}) &= x_1 f^n(x_2, \dots, x_{n+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i f^n(x_1, \dots, x_i x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} f^n(x_1, \dots, x_n)\end{aligned}$$

Eine kurze Rechnung zeigt, dass die zweimalige Anwendung des Korandhomomorphismus den Nullhomomorphismus ergibt: $\delta\delta = 0$. Das Bild $\delta(C^{n-1}(Q, G))$ bezeichnet man mit $B^n(Q, G)$ ($n \geq 2$), den Kern von $\delta: C^n \rightarrow C^{n+1}$ mit $Z^n(Q, G)$ ($n \geq 1$). Wegen $\delta\delta = 0$ ist $B^n(Q, G)$ Untergruppe von $Z^n(Q, G)$. Die resultierende Faktorgruppe

$$H^n(Q, G) := Z^n(Q, G) / B^n(Q, G)$$

heisst die n. Kohomologiegruppe von Q mit Werten in der Gruppe G. ($n \geq 2$)

1.3 Ergänzungen für die Dimensionen 0 und 1.

Unter einer 0-Kokette f^0 sei ein Element aus G verstanden. Dementsprechend ist $C^0(Q, G) = G$. Der Korandhomomorphismus $\delta: C^0 \rightarrow C^1$ ist durch die Formel

$$\delta f^0(x) := x f^0 - f^0$$

definiert. Nun ist auch klar, was unter $B^1(Q, G)$ zu verstehen ist: $B^1(Q, G) = \delta(C^0(Q, G))$. $B^1(Q, G)$ ist Untergruppe von $Z^1(Q, G)$ und die Faktorgruppe von $Z^1(Q, G)$ mod $B^1(Q, G)$ ist die erste Kohomologiegruppe von Q mit Werten in G. - Setzen wir ferner $Z^0(Q, G) := \text{Kern}(\delta: C^0 \rightarrow C^1)$ und $B^0(Q, G) := 0$, so ist die 0. Kohomologiegruppe $H^0(Q, G) := Z^0(Q, G) / B^0(Q, G)$ gleich $Z^0(Q, G)$.

Eine 0-Kokette f^0 gehört genau dann zu $Z^0(Q, G)$, wenn für jedes $x \in Q$ $xf^0 - f^0 = 0$ richtig ist. $H^0(Q, G) = Z^0(Q, G)$ ist also diejenige Untergruppe von G , die aus den Elementen besteht, welche gegenüber allen Operatoren aus Q invariant sind.

Noch einige Bezeichnungen: Die Elemente aus $B^i(Q, G)$ heissen i -dimensionale Koränder, die Elemente aus $Z^i(Q, G)$ i -dimensionale Kozykeln. Zwei Kozykeln f und g , deren Differenz $f - g$ ein Korand ist, heissen kohomolog, in Zeichen: $f \sim g$

1.4 Die Gruppe $H^1(Q, G)$.

Ist f ein 1-Kozykel, so gilt für irgendzwei Elemente $x, y \in Q$: $\delta f(x, y) = xf(y) - f(xy) + f(x) = 0$.

$Z^1(Q, G)$ ist also die Gruppe der verschränkten Homomorphismen von Q in G .

Ein 1-Korand ist eine Funktion $f: Q \rightarrow G$, die sich in der Form $f(x) = xg - g$ mit geeignetem g aus G schreiben lässt, also ein Prinzipalhomomorphismus. $H^1(Q, G)$ ist die Faktorgruppe der Gruppe der verschränkten Homomorphismen nach der Gruppe der Prinzipalhomomorphismen.

Ein wichtiger Sonderfall liegt vor, wenn Q trivial auf G operiert (d.h. $xg = g$ für alle $x \in Q, g \in G$). Dann ist ein 1-Kozyklus ein Homomorphismus von Q in G und jeder 1-Korand ist die Nullfunktion.

Resultat:

Operiert Q trivial auf G , so ist $H^1(Q, G)$ die Gruppe der Homomorphismen von Q in G , $H^1(Q, G) = \text{Hom}(Q, G)$.

1.5 Die Gruppen $H^2(Q, G)$ und $\text{Ext}(Q, G)$.

Eine 2-Kokette $f \in C^2(Q, G)$ ist genau dann ein Kozykel, wenn für beliebige x, y, z aus Q

$$\delta f(x, y, z) = xf(y, z) + f(x, yz) - f(x, y) - f(xy, z) = 0$$

gilt. Auf Grund dieser Beziehung ergibt sich ein Zusammenhang von $H^2(Q, G)$ mit Gruppenerweiterungen von Q durch G , den Eilenberg und MacLane in (6a) ausführlich untersuchten. Eines der dabei erzielten Resultate lautet:

Satz 1.1: Q operiere trivial auf G . Ist $Q = F/R$ Quotientengruppe der freien Gruppe F , dann ist $H^2(Q, G)$ isomorph zur Gruppe derjenigen Homomorphismen von R in G , die auf den Kommutatoren $ara^{-1}r^{-1}$ ($a \in F, r \in R$) verschwinden, reduziert nach der Gruppe der Homomorphismen $R \rightarrow G$, die zu einem Homomorphismus von F in G fortgesetzt werden können.

$$H^2(Q, G) = \text{Hom}(R, G \mid (F, R) \rightarrow 0) / (\text{Hom}(F, G) \mid R)$$

Dieser Satz ist in der genannten Arbeit auf Seite 74 bewiesen.

Ist Q frei, so kann $F = Q$ und $R = \{1\}$ gewählt werden. Nach Satz 1.1 gilt daher

Folgerung: Operiert die freie Gruppe Q trivial auf G , so ist $H^2(Q, G) = 0$.

Die Gruppe $\text{Ext}(Q, G)$

Sei nun Q eine beliebige Gruppe, die trivial auf G operiert. Diejenigen 2-Kozykeln, die die

Symmetriebedingung $f(x,y) = f(y,x)$ erfüllen, bilden eine Untergruppe von $Z^2(Q,G)$. Da die Koränder $g(x) - g(xy) + g(y)$ stets symmetrisch sind, gibt die Gruppe der symmetrischen Kozykeln Anlass zu einer Untergruppe $H_S^2(Q,G)$ von $H^2(Q,G)$.

Satz 1.2: Operiert Q trivial auf G , so gilt:

$$H_S^2(Q,G) \cong \text{Ext}(Q,G) .$$

Dabei wird $\text{Ext}(Q,G)$ üblicher Weise so definiert: Man stellt Q als Quotientengruppe einer freien abelschen Gruppe F_a dar, $Q = F_a/R_a$ und bildet

$$E := \text{Hom}(R_a, G) / (\text{Hom}(F_a, G) \mid R_a)$$

$\text{Hom}(F_a, G) \mid R_a$ bedeute dabei die Gruppe der Homomorphismen $R_a \rightarrow G$, die sich zu einem Homomorphismus von F_a in G fortsetzen lassen. Die Gruppe E hängt, wie eine einfache Überlegung zeigt, nur von Q und G ab und wird ausführlicher mit $\text{Ext}(Q,G)$ bezeichnet. - Ist G divisibel, so kann jeder Homomorphismus von R_a in G zu einem Homomorphismus $F_a \rightarrow G$ fortgesetzt werden.

Folgerung: Operiert Q trivial auf der divisiblen Gruppe G , so ist $\text{Ext}(Q,G) = 0$, d.h. jeder symmetrische 2-Kozykel aus $Z^2(Q,G)$ ist ein Korand. -

Einen Beweis von Satz 1.2 findet man in (6a).

1.6 Normalisierte Koketten:

Eine p -Kokette f aus $C^p(Q,G)$ heisst normalisiert, wenn $f(x_1, \dots, x_p) = 0$, sobald auch nur eine der Variablen x_i aus Q das Einselement ist. Die normalisierten p -Koketten bilden eine Untergruppe $C_n^p(Q,G)$ von

$C^P(Q, G)$. Da mit f stets auch der Korand δf normalisiert ist (Beweis durch Ausrechnen), induziert der Korandhomomorphismus δ einen Korandoperator δ_n der Gruppen C_n^P normalisierter Koketten, $\delta_n: C_n^P \rightarrow C_n^{P+1}$. Derselbe Prozess, der in 1.2 und 1.3 zur Konstruktion der Kohomologiegruppen $H^P(Q, G)$ angewendet wurde, gestattet es, auch im vorliegenden Fall Kohomologiegruppen $H_n^P(Q, G)$ zu bilden. Ferner induziert der Monomorphismus $i: C_n^P(Q, G) \rightarrow C^P(Q, G)$ einen Homomorphismus $i^*: H_n^P(Q, G) \rightarrow H^P(Q, G)$. Nach einem Satz von Eilenberg und MacLane ist i^* ein Isomorphismus-auf. (siehe (6a) S.61). Insbesondere ist jeder Kozyklus zu einem normalisierten Kozyklus kohomolog.

Operiert Q trivial auf G , so ist die letzte Behauptung für 2-Kozykeln $f \in Z^2(Q, G)$ leicht einzusehen: Aus

$$f(xy, z) + f(x, y) = f(x, yz) + f(y, z)$$

folgt für $y = 1$: $f(x, 1) = f(1, z) = f(1, 1) = c$.

Bezeichnet h die konstante 1-Kokette, die durch $h(x) := c$ definiert ist, so ist der zu f kohomologe Kozyklus $f - \delta h$ normalisiert.

1.7 Normale Koketten.

Wir setzen für diesen Abschnitt voraus:

- a) Q operiert trivial auf G
- b) Alle vorkommenden Koketten sind normalisiert

Sei nun Q das direkte Produkt zweier Gruppen A und B , $Q = A \times B$. Jedes Element q_i aus Q ist auf genau eine

Art als $a_i b_i = q_i$ darstellbar ($a_i \in A, b_i \in B$).

Definition: Eine Kokette $f \in C^n(Q, G)$ heisst normal, wenn für alle n -Tupel $(q_1, \dots, q_n)$

$$f(q_1, \dots, q_n) = \sum_{k=0}^n f(a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_n)$$

gilt. Wegen des folgenden Satzes von Lyndon spielen die normalen Koketten eine wichtige Rolle.

Satz 1.3: Jeder Kozyklus ist zu einem normalen Kozyklus kohomolog.

Dieser Satz wird in (11) S. 278 bewiesen.

Normale 2-Kozykeln haben eine wichtige Eigenschaft, die wir später verwenden werden:

Satz 1.4: Für einen normalen 2-Kozyklus f gelten folgende lineare Beziehungen:

$$f(a_1 b_1, b_2) = f(a_1, b_2) + f(b_1, b_2)$$

$$f(a_1, a_2 b_2) = f(a_1, a_2) + f(a_1, b_2)$$

Aus der Normalität folgt nämlich

$$f(a_1 b_1, 1 \cdot b_2) = f(b_1, b_2) + f(a_1, b_2) + f(a_1, 1)$$

Da f normalisiert ist, verschwindet $f(a_1, 1)$. Genau so einfach lässt sich die zweite Gleichung beweisen.

1.8 Induzierte Homomorphismen

(a) Q operiere auf den beiden Gruppen G und F . Ein Q -Homomorphismus $\varphi: G \rightarrow F$ induziert vermöge

$$\varphi_0(f)(x_1, \dots, x_n) := \varphi(f(x_1, \dots, x_n))$$

einen Homomorphismus $\varphi_0: C^n(Q, G) \rightarrow C^n(Q, F)$. Wegen

$\varphi_0 \delta = \delta \varphi_0$ gibt φ_0 wiederum Anlass zu einem Homomorphismus $\varphi^*: H^n(Q, G) \rightarrow H^n(Q, F)$.

Sei nun $0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von Gruppen, auf denen Q operiert. Alle Homomorphismen seien Q -Homomorphismen. Dann ist auch die Sequenz $0 \rightarrow C^n(Q, G') \rightarrow C^n(Q, G) \rightarrow C^n(Q, G'') \rightarrow 0$ exakt und führt in bekannter Weise zur exakten Sequenz $0 \rightarrow H^0(Q, G') \rightarrow H^0(Q, G) \rightarrow H^0(Q, G'') \rightarrow H^1(Q, G') \rightarrow H^1(Q, G) \rightarrow \dots$

(b) Seien nun Q und R zwei Operatorgruppen von G und $\alpha: Q \rightarrow R$ ein Homomorphismus $\alpha(x)g = xg$ ($x \in Q, g \in G$). Durch $(\alpha_1 f)(x_1, \dots, x_n) := f(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n))$ ist ein Homomorphismus $\alpha_1: C^n(R, G) \rightarrow C^n(Q, G)$ definiert, der mit dem Korandoperator δ vertauschbar ist und deshalb einen natürlichen Homomorphismus

$$* \alpha: H^n(R, G) \rightarrow H^n(Q, G)$$

induziert.

(c) $0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 0$ sei eine exakte Sequenz von Gruppen, auf denen Q und R operieren. Die Homomorphismen seien Q und R -Homomorphismen. $\alpha: Q \rightarrow R$ erfülle die in (b) genannte Einschränkung bzgl. G' , G und G'' . Unter Verwendung der in (a) und (b) erklärten Homomorphismen kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H^{n-1}(R, G'') & \rightarrow & H^n(R, G') & \rightarrow & H^n(R, G) \rightarrow H^n(R, G'') \rightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \rightarrow & H^{n-1}(Q, G'') & \rightarrow & H^n(Q, G') & \rightarrow & H^n(Q, G) \rightarrow H^n(Q, G'') \rightarrow \dots \end{array}$$

§ 2 Der Ring $H(Q, G)$.

Q bezeichne wieder eine beliebige Gruppe, welche auf einem Ring G operiert. (Für dieses Operieren von Q auf einem Ring G fordern wir

$$x(g_1 g_2) = (xg_1)(xg_2) \quad x \in Q, g_i \in G.)$$

Verstehen wir unter G auch die additive Gruppe des Ringes G , so können die Kohomologiegruppen $H^n(Q, G)$ gebildet werden. Die direkte Summe aller dieser Gruppen heiße $H(Q, G)$. Da G ein Ring ist, lässt sich in $H(Q, G)$ die Struktur eines graduierten Ringes einführen. Der auf diese Weise entstehende Ring wird ebenfalls mit $H(Q, G)$ bezeichnet. - Zur Erklärung der Multiplikation reicht es hin, das Produkt eines Elementes aus $H^p(Q, G)$ und eines Elementes aus $H^q(Q, G)$ zu definieren.

2.1 Definition des Cup-Produktes von Koketten:

Das Cup-Produkt $f^p \cup f^q$ zweier Koketten $f^p \in C^p(Q, G)$ und $f^q \in C^q(Q, G)$ sei die $(p+q)$ -Kokette aus $C^{p+q}(Q, G)$, welche durch

$$(f^p \cup f^q)(x_1, \dots, x_{p+q}) = f^p(x_1, \dots, x_p) \cdot (x_1 \cdots x_p) f^q(x_{p+1}, \dots, x_{p+q})$$

definiert ist, ($p > 0, q > 0$). Ergänzend definiert man

$$(f^p \cup f^0)(x_1, \dots, x_p) = f^p(x_1, \dots, x_p) \cdot (x_1 \cdots x_p) f^0, \quad p > 0$$

$$(f^0 \cup f^q)(x_1, \dots, x_q) = f^0 \cdot f^q(x_1, \dots, x_q) \quad q > 0$$

$$f^0 \cup g^0 = f^0 \cdot g^0$$

Diese Multiplikation von Koketten ist assoziativ und distributiv.

2.2 Durch Rechnung beweist man die Gültigkeit von

$$\delta(f^p \cup f^q) = (\delta f^p) \cup f^q + (-1)^p f^p \cup (\delta f^q)$$

Hieraus folgt:

$$\text{Kozyklus} \cup \text{Kozyklus} = \text{Kozyklus}$$

$$\text{Kozyklus} \cup \text{Korand} = \text{Korand}$$

$$\text{Korand} \cup \text{Kozyklus} = \text{Korand}$$

Um nun das Produkt $h^p \cup h^q$ zweier Kohomologieklassen h^p, h^q zu definieren, wählt man aus beiden Klassen repräsentierende Kozykeln f^p bzw. f^q aus und erklärt:

$$h^p \cup h^q := \text{Kohomologiekasse von } f^p \cup f^q$$

Obige Regeln zeigen die Unabhängigkeit der Definition von der Auswahl der Repräsentanten f^p, f^q .

2.3 Zerfallende Kozykeln.

(Vorläufige) Definition: Ein Kozyklus $f^{p+q} \in Z^{p+q}(Q, G)$ heisst (p,q)-zerfallend ($p, q \geq 1$), wenn er sich in der Form

$$f^{p+q} = \sum_{\mu=1}^m f_{\mu}^p \cup f_{\mu}^q$$

mit geeigneten Kozykeln f_{μ}^p und f_{μ}^q schreiben lässt. Wenn im folgenden von zerfallenden 2-Kozykeln die Rede sein wird, so ist damit (1,1)-zerfallend gemeint.

Entsprechend heisst eine Kohomologiekasse h^{p+q} (p,q)-zerfallend, wenn eine Darstellung

$$h^{p+q} = \sum_{\mu=1}^m h_{\mu}^p \cup h_{\mu}^q$$

existiert.

Für Anwendungen zitieren wir:

Satz 2.1: Q sei die Fundamentalgruppe der orientierbaren geschlossenen Fläche vom Geschlecht p , die durch die $2p$ Erzeugenden $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p$ und die Relation

$$x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} \dots x_p y_p x_p^{-1} y_p^{-1} = 1$$

gegeben ist. Operiert Q trivial auf dem Ring G mit Einselement, so zerfällt jedes Element von $H^2(Q, G)$.

Satz 2.2: G sei ein Ring mit Einselement, auf dem die freie abelsche Gruppe Q mit endlich vielen Erzeugenden trivial operiert. Dann zerfällt jedes Element in $H^2(Q, G)$.

Beide Sätze wurden von B.Eckmann in (4) Seite 280/81 bewiesen.

Unter geeigneten Voraussetzungen über G lässt sich ein Analogon des letzten Satzes für beliebige abzählbare abelsche Gruppen Q beweisen (vgl. § 4). Zuvor ist allerdings der Begriff des Zerfallens von Kozykeln geeignet zu verallgemeinern.

§ 3 Folgen und Reihen von Koketten.

3.1 Der Koeffizientenbereich sei jetzt wieder eine abelsche Gruppe G , auf der eine Gruppe Q operiert.

Eine Folge (f_μ^p) von Koketten aus $C^p(Q, G)$ heisst konvergent mit f^p als Limes, wenn für jedes p -Tupel $(x_1, \dots, x_p)$ von Elementen $x_i \in Q$ $f_\mu^p(x_1, \dots, x_p)$ für fast alle Indizes μ gleich $f^p(x_1, \dots, x_p)$ ist.

Eine Reihe $\sum_{\mu=1}^{\infty} f_\mu^p$ heisst konvergent mit f^p als Summe, wenn die Folge der Teilsummen $\sum_{\mu=1}^m f_\mu^p$ gegen f^p konvergiert, wenn also für jedes System $(x_1, \dots, x_p)$ von Variablen fast alle $f_\mu^p(x_1, \dots, x_p)$ verschwinden und die Summe der restlichen $f_\mu^p(x_1, \dots, x_p)$ gerade den Wert $f^p(x_1, \dots, x_p)$ hat.

Sind $\sum f_\mu^p$ und $\sum g_\mu^p$ konvergente Reihen (wenn es klar ist, wie die Summationsvorschrift lautet, lassen wir sie bisweilen weg), dann konvergieren auch die Reihen der Summen $f_\mu^p + g_\mu^p$ und Differenzen $f_\mu^p - g_\mu^p$.

Es gilt:
$$\sum (f_\mu^p \pm g_\mu^p) = \sum f_\mu^p \pm \sum g_\mu^p$$

3.2 Konvergiert die Reihe $\sum f_\mu^p$, dann konvergiert auch die Reihe $\sum (\delta f_\mu^p)$ der abgeleiteten Koketten und es besteht die Beziehung

$$\sum (\delta f_\mu^p) = \delta (\sum f_\mu^p)$$

Beweis:
$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \delta f_\mu^p(x_1, \dots, x_{p+1}) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[x_1 f_\mu^p(x_2, \dots, x_{p+1}) + \sum_{i=1}^p (-1)^i f_\mu^p(x_1, \dots, x_i x_{i+1}, \dots, x_{p+1}) + (-1)^{i+1} f_\mu^p(x_1, \dots, x_p) \right]$$

Da nur endlich viele $f_{\mu}^p(*, \dots, *)$ von Null verschieden sind, dürfen wir beliebig umordnen und deshalb so weiterschliessen:

$$\begin{aligned}
 &= x_1 \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} f_{\mu}^p(x_2, \dots, x_{p+1}) + \sum_{i=1}^p (-1)^i \sum_{\mu=1}^{\infty} f_{\mu}^p(x_1, \dots, x_i x_{i+1}, \dots, x_{p+1}) \\
 &\quad + (-1)^{i+1} \sum_{\mu=1}^{\infty} f_{\mu}^p(x_1, \dots, x_p) \\
 &= \delta \left(\sum_{\mu=1}^{\infty} f_{\mu}^p \right) (x_1, \dots, x_{p+1}) \qquad \qquad \qquad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

Eine konvergente Reihe von Kozykeln ist ein Kozyklus.

3.3 Zerfallende Kozykeln und Kohomologieklassen

Koeffizientenbereich sei ein Ring G , auf dem eine Gruppe Q operiert. Ein Kozyklus $f^{p+q} \in Z^{p+q}(Q, G)$ heisst (p, q) -zerfallend, wenn es p -Kozyklen f_{μ}^p und q -Kozykeln g_{μ}^q ($\mu = 1, 2, \dots$) mit den folgenden zwei Eigenschaften gibt:

- (1) Beide Reihen $\sum f_{\mu}^p$ und $\sum g_{\mu}^q$ konvergieren.
- (2) Die (wegen (1)) konvergente Reihe $\sum (f_{\mu}^p \cup g_{\mu}^q)$ stellt den Kozyklus f^{p+q} dar:

$$\sum (f_{\mu}^p \cup g_{\mu}^q) = f^{p+q}$$

Summe und Differenz (p, q) -zerfallender Kozykeln sind ebenfalls (p, q) -zerfallende Kozykeln.

Eine Kohomologieklasse $h^{p+q} \in H^{p+q}$ nennen wir genau dann (p, q) -zerfallend, wenn wenigstens einer ihrer repräsentierenden Kozykeln (p, q) -zerfallend ist.

Ein solcher Repräsentant sei $f^{p+q} = \sum (f_{\mu}^p \cup g_{\mu}^q)$

Wir untersuchen, "inwieweit die Kohomologieklassen h_μ^p und h_μ^q der Kozykeln f_μ^p und g_μ^q h^{p+q} bestimmen":

Seien f_μ^p und g_μ^q irgendwelche weiteren Repräsentanten der Kohomologieklassen h_μ^p und h_μ^q mit der Eigenschaft, dass die Reihen $\sum f_\mu^p$ und $\sum g_\mu^q$ konvergieren. Dann ist $\sum (f_\mu^p \cup g_\mu^q)$ als konvergente Reihe von Kozykeln ebenfalls ein Kozyklus und definiert somit eine Kohomologieklassse h^{p+q} aus $H^{p+q}(Q, G)$.

Behauptung: $h^{p+q} = h^{p+q}$

Beweis: Aus $f_\mu^p - f_\mu^p = \delta b_\mu^{p-1}$ und $g_\mu^q - g_\mu^q = \delta c_\mu^{q-1}$ (b_μ^{p-1} und c_μ^{q-1} seien geeignete Koketten) folgt:

$$\begin{aligned} f_\mu^p \cup g_\mu^q - f_\mu^p \cup g_\mu^q &= f_\mu^p \cup (\delta c_\mu^{q-1}) + (\delta b_\mu^{p-1}) \cup g_\mu^q \\ &= \delta (b_\mu^{p-1} \cup g_\mu^q + (-1)^p f_\mu^p \cup c_\mu^{q-1}) \end{aligned}$$

Wegen der Konvergenz der Reihen $\sum g_\mu^q$ und $\sum f_\mu^p$ ist auch die Reihe

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} (b_\mu^{p-1} \cup g_\mu^q + (-1)^p f_\mu^p \cup c_\mu^{q-1})$$

konvergent und stellt eine Kokette z^{p+q-1} dar. Laut Konstruktion von z^{p+q-1} besteht dann die Beziehung:

$$\sum (f_\mu^p \cup g_\mu^q) = \sum (f_\mu^p \cup g_\mu^q) + \delta z^{p+q-1},$$

welche $h^{p+q} = h^{p+q}$ zur Folge hat.

Die soeben bewiesene Tatsache motiviert folgende

Definition: Eine Reihe $\sum h_\mu^p \cup h_\mu^q$ von Produkten von Kohomologieklassen $h_\mu^p \in H^p(Q, G)$, $h_\mu^q \in H^q(Q, G)$ ($p, q > 0$) heisst genau dann konvergent, wenn man aus den Klassen h_μ^p und h_μ^q solche Repräsentanten auswählen kann,

dass die mit diesen repräsentierenden Kozykeln f_{μ}^p bzw. g_{μ}^q gebildeten Reihen $\sum f_{\mu}^p$ und $\sum g_{\mu}^q$ konvergieren. - Die eindeutig bestimmte Kohomologieklassse des Kozykels $\sum (f_{\mu}^p \cup g_{\mu}^q)$ heisst die Summe der Reihe

$$\sum (h_{\mu}^p \cup h_{\mu}^q)$$

Demnach ist eine Kohomologieklassse h^{p+q} genau dann (p,q) -zerfallend, wenn sie Summe einer konvergenten Reihe $\sum h_{\mu}^p \cup h_{\mu}^q$ ist.

Die Gesamtheit der (p,q) -zerfallenden Elemente in $H^{p+q}(Q,G)$ ist eine Untergruppe von $H^{p+q}(Q,G)$. Ist h^{p+q} (p,q) -zerfallend und h^r irgendeine weitere Kohomologieklassse der Dimension r , dann ist $h^r \cup h^{p+q}$ $(p+r,q)$ -zerfallend und $h^{p+q} \cup h^r$ $(p,q+r)$ -zerfallend.

Eine Sprechweise: $(1,1)$ -zerfallende Kozykeln oder $(1,1)$ -zerfallende Kohomologieklassen nennen wir kurz: "zerfallend".

§ 4 Genauere Diskussion der 2-dimensionalen Kozykeln und Kohomologieklassen.

In diesem Paragraph bedeute R durchwegs einen kommutativen Ring mit Einselement, dessen additive Gruppe (wir bezeichnen sie ebenfalls mit R) torsionsfrei und divisibel ist. Wegen dieser Eigenschaften ist für jede rationale Zahl $\frac{m}{n}$ eindeutig das Produkt $\frac{m}{n} \cdot r$ mit einem Element $r \in R$ erklärt. Ferner sei Q eine abzählbare Gruppe, die trivial auf R operiert. Die Elemente in $Z^2(Q, R)$ bilden den Gegenstand der Untersuchungen dieses Paragraphen.

Satz 4.1: P und Q seien abzählbare Gruppen. Jede bilineare Abbildung $h: P \times Q \rightarrow R$ in die additive Gruppe von R kann als konvergente Reihe von Homomorphismenprodukten dargestellt werden:

$$h(x, y) = \sum_{\mu} u_{\mu}(x) \cdot v_{\mu}(y) \quad (x, y) \in P \times Q$$

(Die u_{μ} bzw. v_{μ} sind Homomorphismen von P bzw. Q in R). Die Konvergenz entsteht dadurch, dass für beliebiges $x \in P$ fast alle $u_{\mu}(x)$ verschwinden. Besitzt P ein endliches Erzeugendensystem, so kann h durch eine entsprechende endliche Summe von Homomorphismenprodukten dargestellt werden.

B e w e i s : Da h in beiden Variabeln ein Homomorphismus in eine torsionsfreie abelsche Gruppe R ist, können wir annehmen, dass P und Q ebenfalls abelsch und torsionsfrei sind. Wir fassen nun P und Q als Untergruppen gewisser divisibler Gruppen $D(P)$ und $D(Q)$ auf.

Die Konstruktion dieser Gruppen $D(P)$ und $D(Q)$ ist zur Konstruktion des Quotientenkörpers des Ringes der ganzen Zahlen analog: (Vgl. auch A. Kurosch: Lehrbuch der Gruppentheorie).

Die Elemente von $D(P)$ sind Klassen von Paaren (x, n) . Dabei sei x Element in P und n eine natürliche Zahl. Zur gleichen Klasse gehören zwei Paare (x, n) und (y, m) genau dann, wenn $mx = ny$. Die Summe zweier Paare (x, n) und (y, m) ist das Paar $(mx + ny, mn)$. Man sieht leicht, dass die Addition von Paaren auch zu einer Addition der Klassen führt. Damit wird $D(P)$ zu einer abelschen, divisiblen Gruppe ohne Elemente endlicher Ordnung. $D(P)$ enthält eine zu P isomorphe Untergruppe: Es ist dies diejenige Untergruppe, die von den Klassen der Paare $(x, 1)$ gebildet wird. Der Isomorphismus ist durch $x \rightarrow (x, 1)$ gegeben.

Analog sei die divisible Gruppe $D(Q)$ gebildet.

Wir setzen nun die Abbildung $h: P \times Q \rightarrow R$ zu einer bilinearen Abbildung $H: D(P) \times D(Q) \rightarrow R$ fort: Repräsentieren die Paare (x, n) und (y, m) zwei Elemente der beiden Gruppen $D(P)$ und $D(Q)$, so definieren wir:

$$H((x, n), (y, m)) := \frac{1}{mn} h(x, y)$$

gehört (x', n) zur selben Klasse wie (x, n) , d.h. ist $nx' = n'x$ richtig, so gilt:

$$\begin{aligned} H((x', n), (y, m)) &= \frac{1}{n'm} h(x', y) = \frac{1}{n'mn} h(n'x, y) \\ &= \frac{1}{n'mn} h(nx', y) = H((x, n), (y, m)) \end{aligned}$$

ist also tatsächlich unabhängig von Auswahl der

repräsentierenden Paare.

Nachweis der Linearität in der ersten Variabeln:

$$\begin{aligned} H((x,n) + (x_1,n_1), (y,m)) &= H((n_1x + nx_1, nn_1), (y,m)) \\ &= \frac{1}{nn_1m} h(n_1x + nx_1, y) = \frac{1}{nm} h(x, y) + \frac{1}{n_1m} h(x_1, y) \\ &= H((x,n), (y,m)) + H((x_1,n_1), (y,m)) \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen ist H auch in der zweiten Variabeln additiv. H ist also eine bilineare Abbildung von $D(P) \times D(Q)$ in R und wegen $H((x,1), (y,1)) = h(x,y)$ eine Fortsetzung von h .

Die Behauptung unseres Satzes ist für die Abbildung H leicht beweisbar. Beachten wir zunächst, dass die Struktur der Gruppen $D(P)$ und $D(Q)$ völlig bekannt ist: Als torsionsfreie, divisible Gruppen mit abzählbar vielen Elementen sind sie direkte Summen von jeweils höchstens abzählbar vielen Exemplaren der additiven Gruppe des Körpers der rationalen Zahlen. Einen Beweis für diese Tatsache findet man bei Kaplansky (8), Theorem 4. Also:

$$D(P) = \sum_{\mu} T_{\mu} \quad D(Q) = \sum_{\mu} S_{\mu}$$

(T_{μ} und S_{μ} seien Exemplare der additiven Gruppe des Körpers der rationalen Zahlen.) Jedes Element aus $D(P)$ lässt sich demnach eindeutig in der Form $\sum_{\mu} t_{\mu}$ schreiben, wobei fast alle t_{μ} Null sind. Entsprechende Summendarstellungen existieren für die Elemente in $D(Q)$.

Wir definieren nun Homomorphismen $U_{\alpha}: D(P) \rightarrow R$ durch

$$U_{\alpha}(\sum_{\mu} t_{\mu}) := \sum_{\mu} t_{\mu} \delta_{\mu\alpha} \quad \alpha = 1, 2, \dots$$

$\delta_{\mu\alpha}$ bedeute dabei das Kroneckersymbol.

Ind alle t_{μ} mit $\mu > \mu_0$ gleich Null, dann ist auch für alle α mit $\alpha > \mu_0$ $U_{\alpha}(\sum_{\mu} t_{\mu}) = 0$. Daher verschwinden auf beliebig vorgegebenem Element von $D(P)$ fast alle Homomorphismen U_{α} .

erner definieren wir Homomorphismen $V_{\alpha}: D(Q) \rightarrow R$

$$V_{\alpha}(\sum_{\mu} s_{\mu}) := \sum_{\mu} s_{\mu} H_{\alpha\mu}$$

dabei sei $H_{\alpha\mu}$ der Wert der Abbildung H , wenn die erste Variable die Eins aus T_{α} , die zweite Variable die Eins aus S_{μ} ist: $H_{\alpha\mu} = H(1_{\alpha}, 1_{\mu})$.

ann gilt:

$$H(\sum_{\mu} t_{\mu}, \sum_{\gamma} s_{\gamma}) = \sum_{\alpha} U_{\alpha}(\sum_{\mu} t_{\mu}) \cdot V_{\alpha}(\sum_{\gamma} s_{\gamma})$$

it den Bezeichnungen $u_{\alpha} := U_{\alpha}|P$, $v_{\alpha} := V_{\alpha}|Q$ folgt daraus:

$$h(x, y) = \sum_{\alpha} u_{\alpha}(x) \cdot v_{\alpha}(y)$$

esitzt P ein endliches Erzeugendensystem $x_1, \dots, x_k$, so kann eine Zahl A gefunden werden, sodass für jedes $\alpha > A$ $u_{\alpha}(x_i) = 0$, $i = 1, \dots, k$. Dann verschwindet jeder Homomorphismus u_{α} mit $\alpha > A$ auch auf jedem anderen Element $x \in P$, sodass die Reihe nach dem A . Glied abgebrochen werden kann.

nde des Beweises.

Bemerkung: Jeder bilineare 2-Kozyklus $z^2 \in Z^2(Q, R)$ lässt sich als konvergente Reihe von Cup-Produkten von 1-Kozykeln darstellen. Ist Q endlich-erzeugt, so erfüllt jeder bilineare 2-Kozyklus.

Satz 4.2: Q sei eine abzählbare Gruppe und R ein kommutativer Ring, dessen additive Gruppe divisibel und torsionsfrei ist. Dann gilt: Zu jeder bilinear und schiefsymmetrischen Abbildung $h: Q \times Q \rightarrow R$ existieren Homomorphismen $u_\alpha, v_\alpha: Q \rightarrow R$ ($\alpha = 1, 2, \dots$), sodass für alle x und y in Q

$$h(x, y) = \sum_{\alpha} [u_{\alpha}(x)v_{\alpha}(y) - u_{\alpha}(y)v_{\alpha}(x)]$$

Die Konvergenz ist dadurch gesichert, dass die beiden Reihen $\sum_{\alpha} u_{\alpha}, \sum_{\alpha} v_{\alpha}$ im Sinn von § 3.1 konvergieren, wenn u_{α} und v_{α} als 1-Kozykeln aufgefasst werden. Obige Reihe bricht ab, wenn Q endlich-erzeugt ist.

Der Beweis des Satzes verläuft völlig analog zum Beweis von Satz 4.1. Die dort konstruierte Abbildung $H: D(Q) \times D(Q) \rightarrow R$ hat in diesem Fall die zusätzliche Eigenschaft $H(t, s) = -H(s, t)$.

Wir definieren wieder:

$$U_{\alpha}(\sum_{\mu} t_{\mu}) := \sum_{\mu} t_{\mu} \delta_{\mu\alpha}$$

Lediglich die Homomorphismen $V_{\alpha}: D(Q) \rightarrow R$ werden nun anders definiert:

$$V_{\alpha}(\sum_{\gamma} s_{\gamma}) := \sum_{\gamma} s_{\gamma} F_{\alpha\gamma}$$

Dabei bedeute $F_{\alpha\gamma} = H(1_{\alpha}, 1_{\gamma})$, wenn $\alpha < \gamma$. Ist $\alpha \geq \gamma$, dann sei $F_{\alpha\gamma} = 0$.

Mit diesen Homomorphismen U_{α}, V_{α} gilt:

$$H(t, s) = \sum_{\alpha} [U_{\alpha}(t)V_{\alpha}(s) - U_{\alpha}(s)V_{\alpha}(t)]$$

$$\text{Beweis: } \sum_{\alpha} \left[U_{\alpha} \left(\sum_{\mu} t_{\mu} \right) V_{\alpha} \left(\sum_{\gamma} s_{\gamma} \right) - U_{\alpha} \left(\sum_{\gamma} s_{\gamma} \right) V_{\alpha} \left(\sum_{\mu} t_{\mu} \right) \right] \\ = \sum_{\mu, \gamma} t_{\mu} s_{\gamma} \cdot \sum_{\alpha} \left(\delta_{\mu \alpha} F_{\alpha \gamma} - \delta_{\gamma \alpha} F_{\alpha \mu} \right) = \sum_{\mu, \gamma} t_{\mu} s_{\gamma} (F_{\mu \gamma} - F_{\gamma \mu})$$

Ist $\mu < \gamma$, so ist $F_{\mu \gamma} - F_{\gamma \mu} = H_{\mu \gamma} - 0$. Ist aber $\gamma < \mu$, so ist $F_{\mu \gamma} - F_{\gamma \mu} = 0 - H_{\gamma \mu} = H_{\mu \gamma}$, denn H ist schiefsymmetrisch. Aus dem selben Grund gilt auch $F_{\mu \mu} - F_{\mu \mu} = H_{\mu \mu} = 0$. In jedem Fall ist also $F_{\mu \gamma} - F_{\gamma \mu} = H_{\mu \gamma}$. Wir können daher in der oben begonnenen Rechnung so weiterfahren:

$$= \sum_{\mu, \gamma} t_{\mu} \cdot s_{\gamma} H_{\mu \gamma} = H \left(\sum_{\mu} t_{\mu}, \sum_{\gamma} s_{\gamma} \right) \quad \text{q.e.d.}$$

Dass auf jedem $t \in D(Q)$ fast alle Homomorphismen U_{α} verschwinden, wurde schon gezeigt. Entsprechend folgt aus $F_{\alpha \mu} = 0$ für $\alpha \geq \mu$, dass fast alle Homomorphismen V_{α} auf jedem beliebigen Element aus $D(Q)$ den Wert 0 annehmen.

Die Homomorphismen U_{α} und V_{α} werden nun wieder auf Q beschränkt. Mit den auf diese Weise gewonnenen Homomorphismen u_{α} , v_{α} gilt dann

$$h(x, y) = \sum_{\alpha} \left[u_{\alpha}(x) v_{\alpha}(y) - u_{\alpha}(y) v_{\alpha}(x) \right]$$

Dass diese Reihe für endlich-erzeugtes Q abbricht, kann wie bei Satz 4.1 bewiesen werden.

Folgerung: Jeder schiefsymmetrische bilineare 2-Kozyklus in $Z^2(Q, R)$ zerfällt.

Dieser Kozyklus ist nämlich die Differenz zweier zerfallender Kozykeln.

Der folgende Satz bringt ein wichtiges Kriterium dafür, dass ein Element von $H^2(Q, R)$ zerfällt.

Satz 4.3: Q sei eine abzählbare Gruppe, R ein kommutativer Ring mit Einselement, dessen additive Gruppe divisibel und torsionsfrei ist. Q operiere trivial auf R . Es gilt: Ein 2-Kozyklus $f^2 \in Z^2(Q, R)$ ist genau dann zu einem zerfallenden Kozyklus kohomolog, wenn eine Abbildung $d: Q \rightarrow R$ existiert, sodass für alle Kommutatoren $K = aba^{-1}b^{-1}$ aus Q gilt:

$$f^2(x, K) = d(x) - d(xK) + d(K)$$

$$f^2(K, y) = d(K) - d(Ky) + d(y)$$

Besitzt Q ein endliches Erzeugendensystem, dann ist jeder zerfallende Kozyklus f^2 einer endlichen Summe von Cup-Produkten kohomolog: $f^2 \sim \sum_{\mu}^M u_{\mu}^1 \cup v_{\mu}^1$

B e w e i s :

(1) f^2 sei kohomolog zu einem zerfallenden Kozyklus

$$f^2(x, y) = \sum_{\mu} u_{\mu}^1(x) v_{\mu}^1(y) + d(x) - d(xy) + d(y)$$

Ersetzt man hierin eine der Variablen durch K , so verschwinden alle Homomorphismenprodukte. Die angegebene Bedingung ist also notwendig.

(2) Es existiere eine Abbildung $d: Q \rightarrow R$ mit der angegebenen Eigenschaft. Zum Beweis führen wir eine Hilfsfunktion $h(x, y)$ ein:

$$h(x, y) := f^2(x, y) - f^2(y, x) + d(xy) - d(yx)$$

Behauptung: h ist eine bilineare Funktion.

Wegen der Schiefsymmetrie genügt es, die Additivität bezüglich der ersten Variablen zu beweisen:

$$\begin{aligned} h(xz, y) - h(x, y) - h(z, y) &= f^2(xz, y) - f^2(y, xz) + d(xzy) \\ &\quad - d(yxz) - f^2(x, y) + f^2(y, x) - d(xy) + d(yx) \\ &\quad - f^2(z, y) + f^2(y, z) - d(zy) + d(yz) \end{aligned}$$

Wir behandeln zunächst einmal nur den Ausdruck A : =

$$f^2(xz, y) - f^2(y, xz) - f^2(x, y) + f^2(y, x) - f^2(z, y) + f^2(y, z)$$

Da f^2 ein Kozyklus ist, gelten folgende Relationen:

$$f^2(xz, y) - f^2(z, y) = f^2(x, zy) - f^2(x, z)$$

$$f^2(y, x) - f^2(y, xz) = f^2(x, z) - f^2(yx, z)$$

Damit vereinfacht sich der Ausdruck A zu

$$A = f^2(x, zy) - f^2(yx, z) - f^2(x, y) + f^2(y, z)$$

Eine nochmalige Anwendung der Kozyklusrelation ergibt:

$$A = f^2(x, zy) - f^2(yx, z) + f^2(xy, z) - f^2(x, yz)$$

$$= f^2(xy x^{-1} y^{-1} yx, z) - f^2(yx, z) + f^2(x, yz z^{-1} y^{-1} zy) - f^2(x, yz)$$

Hieraus folgt unter Verwendung der Kozyklusrelationen

$$f^2(xy x^{-1} y^{-1} yx, z) - f^2(yx, z) = f^2(xy x^{-1} y^{-1}, yxz) - f^2(xy x^{-1} y^{-1}, yx)$$

$$f^2(x, yz z^{-1} y^{-1} zy) - f^2(x, yz) = f^2(xyz, z^{-1} y^{-1} zy) - f^2(yz, z^{-1} y^{-1} zy)$$

für den Ausdruck A der Wert

$$\begin{aligned} A &= f^2(xy x^{-1} y^{-1}, yxz) - f^2(xy x^{-1} y^{-1}, yx) \\ &\quad + f^2(xyz, z^{-1} y^{-1} zy) - f^2(yz, z^{-1} y^{-1} zy) \end{aligned}$$

Eine der Variablen in den vier Summanden $f^2(*, *)$ ist also jeweils ein Kommutator, sodass die Grössen $f^2(*, *)$ durch die Funktion d ausgedrückt werden können.

Beispielsweise gilt:

$$f^2(xy x^{-1} y^{-1}, yxz) = d(xy x^{-1} y^{-1}) - d(xyz) + d(yxz)$$

Insgesamt erhalten wir für A den Wert

$$A = d(yxz) + d(xy) - d(yx) - d(xzy) - d(yz) + d(zy)$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$h(xz, y) - h(x, y) - h(z, y) = 0.$$

Die Funktion h erfüllt die Voraussetzungen von Satz 4.2. Unter Benützung der dort gebrauchten Bezeichnungen, können wir h so darstellen:

$$h(x, y) = \sum_{\mu} u_{\mu}(x) v_{\mu}(y) - \sum_{\mu} u_{\mu}(y) v_{\mu}(x)$$

Nach Definition von h folgt hieraus:

$$\begin{aligned} s(x, y) &:= f^2(x, y) - \sum_{\mu} u_{\mu}(x) v_{\mu}(y) - d(x) + d(xy) - d(y) \\ &= f^2(y, x) - \sum_{\mu} u_{\mu}(y) v_{\mu}(x) - d(y) + d(yx) - d(x) =: s(y, x) \end{aligned}$$

s ist also ein symmetrischer 2-Kozyklus. Sein Wert ändert sich nicht, wenn eine der Variablen mit einem Kommutator $K = aba^{-1}b^{-1}$ multipliziert wird. Beweis:

$$\begin{aligned} s(Kx, y) - s(x, y) &= f^2(Kx, y) - d(Kx) + d(Kxy) \\ &\quad - f^2(x, y) + d(x) - d(xy) \\ &= f^2(K, xy) - f^2(K, x) - (d(K) - d(Kxy) + d(xy)) \\ &\quad + (d(K) - d(Kx) + d(x)) = 0. \end{aligned}$$

$$s(xK, y) = s(xKx^{-1}x, y) = s(x, y).$$

Aus Symmetriegründen ist diese Behauptung auch für die zweite Variable richtig. Es ist also möglich, s als einen Kozyklus in $Z^2(Q_a, R)$ zu deuten, wenn Q_a

die "abelsch gemachte Gruppe Q " bezeichnet. Da die additive Gruppe von R divisibel ist, kann die Folgerung von Satz 1.2 auf s angewendet werden: Der symmetrische Kozyklus s ist ein Korand:

$$s(x,y) = e(x) - e(xy) + e(y)$$

Setzen wir den rechts stehenden Ausdruck in die Definitionsgleichung von s ein, so erhalten wir:

$$f^2(x,y) = \sum_{\mu} u_{\mu}(x) v_{\mu}(y) + (t(x) - t(xy) + t(y))$$

mit $t(x) := e(x) + d(x)$. Da die Homomorphismen u_{μ} , v_{μ} nach Satz 4.2 gerade die erforderlichen Konvergenzeigenschaften haben, ist $\sum_{\mu} u_{\mu} \cup v_{\mu}$ ein zerfallender Kozyklus und f^2 ist zu ihm kohomolog. Dies beweist den ersten Teil der Behauptung. Da nach Satz 4.2 die angegebene Reihe abbricht, wenn Q endlich-erzeugt ist, ist auch die letzte Behauptung richtig.

Satz 4.3 ist damit vollständig bewiesen.

Folgerung: Sind die Voraussetzungen von Satz 4.3 erfüllt, dann gilt: Jeder bilineare 2-Kozyklus ist zu einem zerfallenden kohomolog.

Denn für einen solchen Kozyklus f^2 gilt durchwegs

$$f^2(x,K) = f^2(K,y) = 0.$$

Eine weitere, bemerkenswerte Folgerung bringt

Satz 4.4: Die Voraussetzungen des Satzes 4.3 seien erfüllt. $\ast \alpha: H^2(Q_a, R) \rightarrow H^2(Q, R)$ sei der von $\alpha: Q \rightarrow Q_a$ induzierte Homomorphismus. Die Untergruppe der zerfallenden Elemente in $H^2(Q, R)$ ist genau das Bild von $\ast \alpha$.

B e w e i s von Satz 4.4:

(1) h^2 aus $H^2(Q, R)$ sei Bild eines Elementes h_a^2 aus $H^2(Q_a, R)$: $h^2 = *_{\alpha}(h_a^2)$. f^2 sei ein Kozyklus der Kohomologieklassse h^2 und f_a^2 sei ein normalisierter Kozyklus aus der Klasse h_a^2 . Dann sind die Kozykeln $\alpha_1(f_a^2)$ und f^2 kohomolog. (α_1 ist der von $\alpha: Q \rightarrow Q_a$ induzierte Homomorphismus der Kettengruppen.) Also:

$$f^2 = \alpha_1(f_a^2) + \delta d^1 \quad d^1 \in C^1(Q, R)$$

Ausführlicher:

$$f^2(x, y) = f_a^2(\alpha(x), \alpha(y)) + d^1(x) - d^1(xy) + d^1(y)$$

Ist eine der Variabeln x, y ein Kommutator, so ist $\alpha(x)$ oder $\alpha(y)$ Null, sodass in beiden Fällen $f_a^2(\alpha(x), \alpha(y))$ verschwindet. Also gilt:

$$f^2(K, y) = d^1(K) - d^1(Ky) + d^1(y)$$

$$f^2(x, K) = d^1(x) - d^1(xK) + d^1(K)$$

Dies reicht nach Satz 4.3 für das Zerfallen der Kohomologieklassse h^2 hin.

(2) Die Kohomologieklassse h^2 aus $H^2(Q, R)$ zerfalle. Das bedeutet, dass in der Klasse h^2 ein zerfallender 2-Kozyklus $f^2 = \sum_{\mu} u_{\mu}^1 \cup v_{\mu}^1$ liegt. Dabei sind die 1-Kozykeln u_{μ}^1 und v_{μ}^1 Homomorphismen von Q in R . Fassen wir diese Homomorphismen als Homomorphismen von Q_a in R auf, so sind dadurch 1-Kozykeln in $Z^1(Q_a, R)$ definiert. Obige Reihe induziert daher einen zerfallenden Kozyklus $f_a^2 \in Z^2(Q_a, R)$, dessen Kohomologieklassse h_a^2 heiße. Offenbar gilt: $h^2 = *_{\alpha}(h_a^2)$. q.e.d.

st die Gruppe Q von vorneherein abelsch, $Q = Q_a$,
o ist $*\alpha$ die Identität. Aus Satz 4.4 folgt also:

Satz 4.5: Die Voraussetzungen des Satzes 4.3 seien erfüllt. Darüberhinaus sei Q abelsch. Es gilt:
edes Element in $H^2(Q, R)$ zerfällt.

ir bringen noch eine weitere Anwendung von Satz 4.3:

Satz 4.6: Q und R mögen die in Satz 4.3 angegebenen Eigenschaften haben. P sei eine weitere abzählbare Gruppe, die trivial auf R operiert. Ebenfalls trivial operiere auf R das direkte Produkt $P \times Q$.
estehen die Gruppen $H^2(Q, R)$ und $H^2(P, R)$ nur aus zerfallenden Elementen, dann zerfällt auch jedes Element in $H^2(P \times Q, R)$.

Beweis: f^2 sei irgend ein Kozyklus in $Z^2(P \times Q, R)$.
egen Satz 1.3 dürfen wir f^2 als normal voraussetzen.
as bedeutet:

$$f^2(p_1 q_1, p_2 q_2) = f^2(q_1, q_2) + f^2(p_1, q_2) + f^2(p_1, p_2)$$

$$\text{durch } f_P^2(p_1, p_2) := f^2(p_1, p_2) \text{ und } f_Q^2(q_1, q_2) := f^2(q_1, q_2)$$

werden Kozykeln aus $Z^2(P, R)$ und $Z^2(Q, R)$ definiert,
elche nach Voraussetzung zu zerfallenden Kozykeln
homolog sind. Es existieren also Funktionen $d: P \rightarrow R$
nd $d': Q \rightarrow R$ mit den in Satz 4.3 angegebenen Eigenschaften.
kK sei nun ein Kommutator in $P \times Q$, wobei
ein Kommutator in P ist und K Kommutator in Q ist.
egen Satz 1.4 ist $f^2(k, q_2) = 0$ und daher gilt:

$$f^2(kK, p_2 q_2) = d'(K) - d'(Kq_2) + d'(q_2)$$

$$+ d(k) - d(kp_2) + d(p_2)$$

Durch $D(pq) := d(p) + d'(q)$ wird eine Funktion $D : P \times Q \rightarrow R$ definiert und für diese gilt:

$$f^2(kK, pq) = D(kK) - D(kKpq) + D(pq)$$

$$f^2(pq, kK) = D(pq) - D(pqkK) + D(kK)$$

Die zweite Relation wird ähnlich wie die erste bewiesen. Nach Satz 4.3 liegt somit in der Kohomologiklasse von f^2 ein zerfallender Kozyklus. q.e.d.

+ +
+ +

Die bisher in diesem Paragraphen aufgestellten Sätze gelten z.B. dann, wenn R der Körper der rationalen oder reellen oder komplexen Zahlen ist. Nun benötigen wir später Analoga dieser Sätze auch für den Fall, dass der Koeffizientenring der Ring Z der ganzen Zahlen ist. Der Rest dieses Paragraphen soll daher der Untersuchung von $Z^2(Q, Z)$ gewidmet sein.

Satz 4.7: Q sei eine abzählbare Gruppe. Jede bilineare, schiefsymmetrische Abbildung $h: Q \times Q \rightarrow Z$ kann folgendermassen dargestellt werden:

$$h(x, y) = \sum_{\alpha}^{\infty} [u_{\alpha}(x)v_{\alpha}(y) - u_{\alpha}(y)v_{\alpha}(x)]$$

Dabei sind die u_{α} und v_{α} Homomorphismen von Q in Z und die Konvergenz kommt dadurch zustande, dass für jedes $x \in Q$ fast alle $u_{\alpha}(x)$ und $v_{\alpha}(x)$ verschwinden.

B e w e i s : Wir können wieder annehmen, Q sei abelsch. Ausserdem besitzt Q bekanntlich eine Untergruppe mit folgenden Eigenschaften: (a) Jeder ganz-

zahlige Charakter auf ihr verschwindet. (b) Die Faktorgruppe von Q nach dieser Untergruppe ist freiabelsch. Demnach dürfen wir Q als freie abelsche Gruppe voraussetzen. Die $x_1, x_2, \dots$ seien eine Basis und wir definieren:

$$\begin{aligned} u_\alpha(\sum m_i x_i) &= \sum m_i \delta_{i\alpha} \\ v_\alpha(\sum m_i x_i) &= \sum m_i F_{\alpha i} \end{aligned}$$

Dabei sei $F_{\alpha i} = h(x_\alpha, x_i)$, wenn $\alpha < i$. Sonst sei $F_{\alpha i} = 0$. Mit diesen Homomorphismen sind alle Behauptungen des Satzes erfüllbar. Ausserdem erkennt man: Wenn Q ein endliches Erzeugendensystem besitzt, dann bricht die obige Reihe für h ab.

Bevor wir das Analogon zu Satz 4.3 formulieren können, eine Ausdrucksweise: Zwei Kozykeln in $Z^2(Q, Z)$ heissen rationalzahlig (reellzahlig) kohomolog, wenn ihre Bilder in $Z^2(Q, R)$ kohomolog sind, unter R der Körper der rationalen (reellen) Zahlen verstanden. $Z^2(Q, Z) \rightarrow Z^2(Q, R)$ sei die in natürlicher Weise vorliegende Injektion.

Satz 4.8: Operiert die abzählbare Gruppe Q trivial auf Z , dann gilt: Ein Kozyklus f^2 in $Z^2(Q, Z)$ ist genau dann zu einem zerfallenden Kozyklus in $Z^2(Q, Z)$ rationalzahlig (reellzahlig) kohomolog, wenn eine Funktion $d: Q \rightarrow R$ von Q in den Körper der rationalen (reellen) Zahlen existiert mit folgenden Eigenschaften

(1) Für jeden Kommutator $K = aba^{-1}b^{-1}$ in Q gilt:

$$f^2(K, y) = d(K) - d(Ky) + d(y)$$

$$f^2(x, K) = d(x) - d(xK) + d(K)$$

(2) Für beliebige $x, y \in Q$ ist $d(xy) - d(yx)$ ganz.

Wird Q von endlich vielen Elementen erzeugt, dann ist jeder zerfallende Kozyklus in $Z^2(Q, Z)$ rationalzählig (reellzählig) kohomolog zu einer endlichen Summe von Cup-Produkten von 1-Kozykeln.

Der Beweis kann fast wörtlich genauso geführt werden wie der Beweis von Satz 4.3: Wie dort wird die Existenz einer Funktion d nachgewiesen, welche (1) erfüllt, wenn $f^2 \sim_R z^2$, z^2 ein zerfallender Kozyklus in $Z^2(Q, Z)$. (" $\sim_R$ " soll dabei andeuten, dass der Korand $\delta d \in B^2(Q, R)$). Wir berechnen:

$$\begin{aligned} d(xy) - d(yx) &= (d(y) - d(yx) + d(x)) - (d(x) - d(xy) + d(y)) \\ &= (f^2 - z^2)(y, x) - (f^2 - z^2)(x, y) \end{aligned}$$

Da f^2 und z^2 in $Z^2(Q, Z)$ liegen, ist $d(xy) - d(yx)$ tatsächlich eine ganze Zahl.

Umgekehrt: Es existiere eine Funktion d mit den Eigenschaften (1) und (2). Wie beim Beweis von Satz 4.3 wird wieder die Funktion h eingeführt. h ist bilinear und schiefsymmetrisch. Wegen Eigenschaft (2) sind ihre Werte durchwegs ganze Zahlen, sodass nach 4.7 eine Darstellung $h = \sum_{\alpha} u_{\alpha} \smile v_{\alpha} - \sum_{\alpha} v_{\alpha} \smile u_{\alpha}$ existiert. Auf Grund der Definition von h folgt nun, dass der durch $s(x, y) := f^2(x, y) - \sum_{\alpha} u_{\alpha} \smile v_{\alpha} - d(x) + d(xy) - d(y)$ definierte Kozyklus s symmetrisch ist. Man erkennt wieder, dass s als Kozyklus in $Z^2(Q, R)$ gedeutet werden kann. Nach der Folgerung von Satz 1.2 ist s ein rationalzahliger (reellzahliger) Korand δe^1 . f^2 und $\sum_{\alpha} u_{\alpha} \smile v_{\alpha}$ sind also in der geforderten Weise kohomolog. - Ist Q endlich-erzeugt, dann bricht die Reihe $\sum_{\alpha} u_{\alpha} \smile v_{\alpha}$ ab.

Folgerung: Jeder bilineare Kozyklus $f^2 \in Z^2(Q, Z)$ ist zu einem zerfallenden Kozyklus in $Z^2(Q, Z)$ rationalzahlig kohomolog. Ist Q endlich-erzeugt, so gilt sogar: $f^2 \sim \sum_{\alpha} u_{\alpha} \cup v_{\alpha}$.

Die Funktion d , definiert durch $d(x) = 0$ für alle $x \in Q$, hat nämlich die Eigenschaften (1) und (2).

Eine weitere Folgerung:

Satz 4.9: Operiert die abelsche Gruppe Q trivial auf Z , dann ist jeder Kozyklus in $Z^2(Q, Z)$ rationalzahlig kohomolog zu einem zerfallenden Kozyklus in $Z^2(Q, Z)$. (Q eine abzählbare Gruppe)

Zunächst ist jeder Kozyklus in $Z^2(Q, Z)$ zu einem normalisierten Kozyklus in $Z^2(Q, Z)$ kohomolog. (Siehe §1.6)

Ist K ein Kommutator in Q , also $K = 0$, so gilt für einen solchen normalisierten Kozyklus f^2 : $f^2(K, y) = 0$, $f^2(x, K) = 0$. Mit $d(x) = 0$, folgt für f^2 nach 4.8 die Behauptung.

Eine dritte Behauptung:

Satz 4.10: Die abzählbaren Gruppen $P, Q, P \times Q$ sollen trivial auf Z operieren. Sind alle Kozykeln in $Z^2(P, Z)$ und $Z^2(Q, Z)$ zu zerfallenden Kozykeln in diesen Gruppen rationalzahlig (reellzahlig) kohomolog, dann ist auch jeder Kozyklus in $Z^2(P \times Q, Z)$ zu einem zerfallenden Kozyklus in $Z^2(P \times Q, Z)$ rationalzahlig (reellzahlig) kohomolog.

Man beweist diesen Satz wörtlich genauso, wie Satz 4.6. Die dort konstruierte Funktion $D: P \times Q \rightarrow Z$ hat auch die Eigenschaft (2), weil d und $d'(2)$ erfüllen.

§ 5 Die Bedeutung der Gruppen $H^2(\pi, G)$ in der Topologie.

5.1 Die Gruppe $H_2(\pi)$.

Die abzählbare Gruppe π sei Quotientengruppe einer freien Gruppe F : $\pi = F/R$. (F, R) bezeichne den von den Elementen $frf^{-1}r^{-1}$ ($f \in F, r \in R$) erzeugten Normalteiler in $R \cap (F, F)$ ((F, F) ist die Kommutatorgruppe von F). Die Faktorgruppe $R \cap (F, F) / (F, R)$ hängt nach H.Hopf nicht von F und R ab, sondern allein von π . (Vgl. (7)). Sie wird mit $H_2(\pi)$ bezeichnet:

$$H_2(\pi) := (R \cap (F, F)) / (F, R)$$

Ist π die Fundamentalgruppe eines Komplexes X , so besteht ein enger, von H.Hopf entdeckter Zusammenhang zwischen $H_2(\pi)$ und der 2. ganzzahligen Homologiegruppe von X . (Siehe: H.Hopf, (7))

Satz 5.1: Ist π die Fundamentalgruppe des Komplexes X und $S_2(X)$ die Gruppe derjenigen 2-dimensionalen ganzzahligen Homologieklassen von X , welche stetige Bilder von Sphären enthalten, dann besteht ein Isomorphismus

$$H_2(X) / S_2(X) \cong H_2(\pi).$$

Die geometrische Deutung dieses Isomorphismus' wird in den nächsten Abschnitten dargelegt.

5.2 Stetige Homotopieränder:

X^r sei der Komplex der höchstens r -dimensionalen Simplexe des simplizialen Komplexes X . $f: E \rightarrow X$ sei eine stetige Abbildung der Kreisscheibe E in den Komplex X

mit den Eigenschaften: $f(\partial E) \subset X^1$, $f(E) \subset X^2$. $Y = f(E)$ ist ein zweidimensionaler Unterkomplex von X^2 . Das Bild des Randes ∂E der Kreisscheibe E ist ein geschlossener Weg γ in X^1 . Dieser Weg γ heisst stetiger Homotopierand von Y .

Definition: Ein zweidimensionaler Zyklus Z in X^2 wird von $k = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_r b_r a_r^{-1} b_r^{-1}$ aus $R \cap (F, F)$ aufgespannt, wenn es in X^1 solche Repräsentanten $\alpha_1, \dots, \beta_r$ von $a_1, \dots, b_r \in F$ gibt, dass der Weg

$$\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \dots \alpha_r \beta_r \alpha_r^{-1} \beta_r^{-1}$$

Homotopierand von Z ist. Dabei verstehen wir unter F die Fundamentalgruppe des Kantenkomplexes X^1 (Fist also frei) und unter R den Kern des Epimorphismus $F \rightarrow \pi$ (π ist die Fundamentalgruppe von X). Die Elemente von F werden durch geschlossene Wege in X^1 mit gemeinsamem Anfangs- und Endpunkt in X^0 repräsentiert.

Die in Aussicht gestellte geometrische Interpretation des oben angegebenen Isomorphismus lautet:

Satz 5.2 (Hopf): Zu jedem Zyklus $Z \subset X^2$ gibt es ein Element $k \in R \cap (F, F)$, das Z aufspannt. Die Gesamtheit aller dieser Elemente k stellt gerade eine der Restklassen von $R \cap (F, F) \bmod (F, R)$ dar. Jedes Element k in einer solchen Restklasse spannt gewisse Zykeln Z auf. Die Homologieklassen dieser Zykeln sind bis auf solche Homologieklassen bestimmt, welche Kugelbilder enthalten. Diese Zuordnung von Elementen aus $(R \cap (F, F)) / (F, R)$ und $H_2(X) / S_2(X)$ ist ein Isomorphismus.

5.3 Das universelle Koeffiziententheorem:

Man kann mit Hilfe einer Gruppe π einen abstrakten Komplex K_π definieren, dessen erste ganzzahlige Homologiegruppe $H_1(K_\pi) = H_1(\pi)$ die abelsch gemachte Gruppe π_a ist und dessen zweite ganzzahlige Homologiegruppe die in 5.1 definierte Gruppe $H_2(\pi)$ ist. Die Kohomologiegruppen dieses Komplexes mit Werten in einer abelschen Gruppe G sind die Gruppen $H^i(\pi, G)$, wobei π trivial auf G operiere. (Man vergleiche hierzu: B.Eckmann (4) und Eilenberg - MacLane (5), (6)). Es gilt:

$$H^2(\pi, G) \cong \text{Hom}(H_2(\pi), G) + \text{Ext}(H_1(\pi), G)$$

(Universelles Koeffiziententheorem). Der Isomorphismus ist natürlich in folgendem Sinn: Ist π' eine weitere Gruppe, die mit π durch einen Homomorphismus $\varphi: \pi \rightarrow \pi'$ verknüpft ist, so setzt sich der induzierte Homomorphismus $H^2(\pi', G) \rightarrow H^2(\pi, G)$ aus den induzierten Homomorphismen $\text{Hom}(H_2(\pi'), G) \rightarrow \text{Hom}(H_2(\pi), G)$ und $\text{Ext}(H_1(\pi'), G) \rightarrow \text{Ext}(H_1(\pi), G)$ zusammen.

Da der Funktor "Hom" links-exakt ist, gibt die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow S_2(X) \rightarrow H_2(X) \rightarrow H_2(\pi) \rightarrow 0$$

Veranlassung zu der exakten Sequenz

$0 \rightarrow \text{Hom}(H_2(\pi), G) \rightarrow \text{Hom}(H_2(X), G) \rightarrow \text{Hom}(S_2(X), G)$.
Dabei verstehen wir unter X einen abstrakten Komplex mit der Fundamentalgruppe π . Die Gruppe $S_2(X)$ ist isomorph zur zweiten ganzzahligen Homologiegruppe

$H_2(\hat{X})$ der universellen Überlagerung $\hat{X}$ von X . Beweis:
 Da $\pi_1(\hat{X}) = 0$, ist auch $H_2(\pi_1(\hat{X})) = 0$ und das bedeutet nach Satz 5.1, dass $H_2(\hat{X})$ zu $S_2(\hat{X})$ isomorph ist.
 Ferner stellt die Projektionsabbildung $p: \hat{X} \rightarrow X$ einen Isomorphismus zwischen den Sphärengruppen $S_2(\hat{X})$ und $S_2(X)$ her, $p(S_2(\hat{X})) \cong S_2(X)$. (H. Hopf (7a)).
 Also: $H_2(\hat{X}) \cong S_2(X)$.

Weiterhin folgt aus der Isomorphie $H_1(X) \cong \pi_a \cong H_1(\pi)$, dass $\text{Ext}(H_1(\pi), G)$ zu $\text{Ext}(H_1(X), G)$ isomorph ist. Insgesamt erhalten wir so auf Grund des universellen Koeffiziententheorems aus obiger exakter Sequenz die weitere exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H^2(\pi, G) \rightarrow H^2(X, G) \rightarrow H^2(\hat{X}, G).$$

Vergleiche Satz 7.1.

Teil II

FORMULIERUNG UND BEWEIS DER HAUPTSÄTZE

Ziel dieses zweiten Kapitels ist die Formulierung und der Beweis eines notwendigen und hinreichenden Kriteriums für die Existenz von multiplikativen automorphen Funktionen bzw. Thetafunktionen zu vorgegebenen Divisoren in gewissen komplex-analytischen Mannigfaltigkeiten.

§6 Formulierung und Reduktion des Problems.

6.1 X sei eine komplex-analytische Mannigfaltigkeit und $\hat{X}$ ihre universelle Überlagerung. Die Gruppe der Decktransformationen von $\hat{X}$ über X ist zur Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ von X isomorph. Aus diesem Grund werden wir häufig beide Gruppen identifizieren. So bedeutet z.B. αz den Punkt von $\hat{X}$, der aus z durch Anwenden derjenigen Decktransformation hervorgeht, die dem Element $\alpha \in \pi_1(X)$ vermöge des erwähnten Isomorphismus entspricht. Es gilt: $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

Ferner operiert $\pi_1(X)$ von links auf dem Ring der auf $\hat{X}$ meromorphen Funktionen. Man setzt fest:

$$(\alpha f)(z) := f(\alpha^{-1}z)$$

Offensichtlich gelten dann die Regeln:

$$\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f, \quad 1 \cdot f = f, \quad \alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g, \quad \alpha(fg) = \alpha f \cdot \alpha g$$

6.2 Zur Definition des Begriffes "Divisor in einer komplex-analytischen Mannigfaltigkeit" bedienen wir uns der Sprache der Garbentheorie. (Die grundlegenden Definitionen und Sätze dieser Disziplin findet man in (1))

$\mathcal{M}$ sei die Garbe der Keime der meromorphen Funktionen auf X (die Verknüpfung sei die Multiplikation). $\mathcal{F}$ sei die Untergarbe der Keime der nichtverschwindenden holomorphen Funktionen auf X . Die eindeutig bestimmte Quotientengarbe $\mathcal{I} := \mathcal{M}/\mathcal{F}$ heisst Garbe der Keime von Divisoren auf X . Die Schnitte in der Garbe $\mathcal{I}$, also die Elemente D aus $H^0(X, \mathcal{I})$ sind die Divisoren auf X .

Auf Grund der Exaktheit der Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow 0 \quad (S)$$

ist ein Divisor lokal durch die Null- und Polstellenflächen einer meromorphen Funktion gegeben, wenn diese Flächen noch mit den ihnen zukommenden Vielfachheiten gezählt werden. Die Gesamtheit der lokalen, mit Vielfachheiten versehenen Null- und Polstellenflächen eines Divisors D heisst der Träger von D .

Häufig wird ein Divisor auch durch eine "Cousin-II Verteilung" gegeben: In jeder Menge U_i einer offenen Überdeckung von X wird eine dort meromorphe Funktion f_i ausgezeichnet und zwar mit der Einschränkung, dass die f_i D -äquivalent sind. Das soll heissen: Wenn der Durchschnitt $U_i \cap U_j$ zweier Mengen U_i und U_j der Überdeckung nicht leer ist, dann ist in $U_i \cap U_j$ der Quotient f_i/f_j holomorph und $\neq 0$.

In der Folge werden wir die Begriffe "Divisor" und "Cousin-II Verteilung" nicht immer streng unterscheiden, sondern häufig im gleichen Sinn gebrauchen.

Der Homomorphismus $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{I}$ induziert einen Homomorphismus $H^0(X, \mathcal{M}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{I})$. Dadurch definiert jede

meromorphe Funktion $f \in H^0(X, \mathcal{M})$ einen Divisor (f) in $H^0(X, \mathcal{D})$. Wir fragen nun: Wie lauten die genauen Bedingungen, unter denen ein vorgegebener Divisor $D \in H^0(X, \mathcal{D})$ durch eine meromorphe Funktion f gelöst werden kann, d.h. der Divisor von f ist, $D = (f)$? Zur Beantwortung dieser Frage zitieren wir kurz einige Überlegungen von J.P. Serre (13) : Die exakte Sequenz (S) induziert die exakte Kohomologiesequenz

$$H^0(X, \mathcal{M}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{D}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) .$$

Ein Divisor D ist also genau dann durch eine meromorphe Funktion f lösbar, wenn sein Bild in $H^1(X, \mathcal{F})$ Null ist. Die Garbe $\mathcal{F}$ wird nun noch als Quotientengarbe der Garbe $\mathcal{O}$ der Keime holomorpher Funktionen aufgefasst (die Verknüpfung in $\mathcal{O}$ ist die Addition): Die Abbildung φ , die jeder holomorphen Funktion g auf X die Funktion $e^{2\pi i g}$ zuordnet, induziert einen Epimorphismus $\varphi^*: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}$, dessen Kern die konstante Garbe $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist. Die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

ist exakt und induziert die exakte Sequenz

$$H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) .$$

Der zusammengesetzte Homomorphismus

$$H^0(X, \mathcal{D}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$$

ordnet also jedem Divisor D in $H^0(X, \mathcal{D})$ eine charak-

teristische Kohomologieklassse $h(D) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ zu, deren Verschwinden notwendig ist für die Existenz einer gesuchten meromorphen Funktion zu D . Umgekehrt: Ist $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$, so ist das Bild eines Divisors D in $H^1(X, \mathcal{F})$ Null, wenn $h(D) = 0$ ist. Ergebnis:

Satz 6.1: (Serre) X sei eine komplexe Mannigfaltigkeit und D ein Divisor in ihr. D ist höchstens dann der Divisor einer meromorphen Funktion, wenn das Kohomologieelement $h(D)$ Null ist. Ist $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$, so reicht die Bedingung $h(D) = 0$ für die Existenz einer meromorphen Funktion zu D auch hin.

Diese Aussage machen wir uns zunutze bei der Untersuchung der Frage, unter welchen Bedingungen ein Divisor D in einer komplexen Mannigfaltigkeit X durch eine Thetafunktion bzw. multiplikative automorphe Funktion (die Definition dieser Funktionen wird in 6.5 gegeben) gelöst werden kann. Zu diesem Zweck ordnen wir nämlich dem Divisor D durch Liften den Divisor $\hat{D}$ auf der universellen Überlagerung $\hat{X}$ von X zu. Dann erscheint eine Thetafunktion (m.a.Funktion) zu D als eine spezielle eindeutige Lösungsfunktion von $\hat{D}$. Die gestellte Aufgabe reduziert sich daher wegen Satz 6.1 auf das Problem: Unter welchen Bedingungen kann eine vorgegebene eindeutige meromorphe Funktion zu $\hat{D}$ in eine Thetafunktion (m.a.Funktion) zu D transformiert werden?

6.3 Gegeben sei in einer komplexen Mannigfaltigkeit X ein Divisor D . Der geliftete Divisor $\hat{D}$ sei der Divisor einer meromorphen Funktion F auf $\hat{X}$, $\hat{D} = (F)$.

Da $\hat{D}$ in übereinanderliegenden Punkten das gleiche Null- und Polstellenverhalten aufweist, ist die durch

$$q_{\alpha}(z) := \frac{(\alpha F)(z)}{F(z)}$$

definierte Funktion $q_{\alpha}(z)$ auf ganz $\hat{X}$ holomorph und $\neq 0$. Daher existiert eine auf $\hat{X}$ holomorphe Funktion $f_{\alpha}(z)$

mit der Eigenschaft: $(\alpha F)(z) = e^{f_{\alpha}(z)} \cdot F(z)$

Auf diese Weise sei jedem Element α in $\pi_1(X)$ eine holomorphe Funktion f_{α} zugeordnet. Diese f_{α} sind folgendermassen durch ganze Zahlen $r(\alpha, \beta)$ verknüpft:

$$f_{\alpha\beta}(z) + 2\pi i \cdot r(\alpha, \beta) = (f_{\beta})(z) + (f_{\alpha})(z) \quad (1)$$

Diese Relation folgt aus

$$e^{f_{\alpha\beta}(z)} = \frac{\alpha\beta F(z)}{F(z)} = \frac{F(\beta^{-1}\alpha^{-1}z)}{F(\alpha^{-1}z)} \cdot \frac{F(\alpha^{-1}z)}{F(z)} = e^{\alpha f_{\beta}(z)} \cdot e^{f_{\alpha}(z)}$$

Es bezeichne $O_{\hat{X}}$ den Ring der auf $\hat{X}$ holomorphen Funktionen. Durch $\varphi(\alpha) := (2\pi i)^{-1} f_{\alpha}$ ist eine 1-Kokette $\varphi \in C^1(\pi_1(X), O_{\hat{X}})$ definiert. Ferner wird durch die Zuordnung $(\alpha, \beta) \rightarrow r(\alpha, \beta)$ eine ganzzahlige 2-Kokette $r \in C^2(\pi_1(X), \mathbb{Z})$ gegeben; dabei operiere $\pi_1(X)$ trivial auf $\mathbb{Z}$. Die Relation (1) besagt dann gerade, dass r der Korand von φ ist: $r = \delta(\varphi)$. Insbesondere ist also r ein ganzzahliger 2-Kozyklus: $\delta(r) = 0$.

6.4 Neben F sei jetzt noch eine weitere meromorphe Funktion G mit $\hat{D} = (G)$ gegeben. Entsprechend der Funktion F gibt G Anlass zu einem System holomorpher Funktionen $g_{\alpha}(z)$ und einem 2-Kozyklus $r^* \in Z^2(\pi_1(X), \mathbb{Z})$, so dass folgende Beziehung besteht:

$$g_{\alpha\beta}(z) + 2\pi i \cdot r^*(\alpha, \beta) = (g_{\beta})(z) + (g_{\alpha})(z) \quad (1^*)$$

Durch $\gamma(\alpha) := (2\pi i)^{-1} g_\alpha$ ist wieder eine 1-Kokette $\gamma \in C^1(\pi_1(X), \hat{O}_X)$ definiert mit $\delta(\gamma) = r^*$.

Da die Divisoren (F) und (G) der Funktionen F und G identisch sind, ist $\frac{G}{F}$ auf $\hat{X}$ holomorph und überall von Null verschieden. Es existiert also eine holomorphe Funktion $H(z)$, sodass

$$G(z) = F(z) \cdot e^{H(z)}$$

Umgekehrt ist jede Funktion G, die so aus F entsteht, eine Lösungsfunktion des Divisors D.

Zusammenhang der Funktionen f_α , g_α und H:

$$\alpha G(z) = e^{\alpha H(z)} \cdot \alpha F(z) = e^{\alpha H(z)} \cdot e^{f_\alpha(z)} \cdot F(z)$$

$$\alpha G(z) = e^{g_\alpha(z)} \cdot G(z) = e^{g_\alpha(z)} \cdot e^{H(z)} \cdot F(z)$$

Sind $d(\alpha)$ geeignete ganze Zahlen, so gilt also:

$$g_\alpha(z) - f_\alpha(z) + 2\pi i \cdot d(\alpha) = \alpha H(z) - H(z)$$

Dieses System von Gleichungen lässt sich folgendermaßen in der Sprache der Kohomologietheorie formulieren:

$$\gamma = \varphi + d = \delta(H')$$

Dabei bedeute d diejenige ganzzahlige 1-Kokette, die durch das System der ganzen Zahlen $d(\alpha)$ definiert ist. Die 0-Kokette H' sei die Funktion $(2\pi i)^{-1} H \in$

$C^0(\pi_1(X), \hat{O}_X)$. Durch Korandbildung erhalten wir daraus

$$r = \delta(d) = r^* \quad (2)$$

Die Untersuchungen lassen sich im weiteren Verlauf durchsichtiger gestalten, wenn der Korand $\delta(d)$ überhaupt verschwindet. Dies kann stets erreicht werden: Da die Funktionen $g_\alpha(z)$ durch G nur bis auf ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$ bestimmt waren, dürfen wir uns

von vorneherein statt der g_α die Funktionen $g_\alpha(z)$ + $2\pi i d(\alpha)$ gewählt denken. Wir erhalten somit folgende Relationen:

$$(A) \quad \gamma - \phi = \delta(H')$$

$$(B) \quad \delta(\gamma) - r = \delta(\phi)$$

6.5 Multiplikative automorphe Funktionen und Theta-funktionen als Lösungsfunktionen von Divisoren in X .

Definition: Eine "multiplikative automorphe Funktion F auf einer komplex-analytischen Mannigfaltigkeit X " ist eine auf der universellen Überlagerung $\hat{X}$ von X meromorphe Funktion F mit den Eigenschaften:

- (a) Die Automorphiefaktoren $m_\alpha(z) := \frac{\alpha F(z)}{F(z)}$ (auch Periodizitätsmoduln von F genannt) sind holomorph auf $\hat{X}$ und überall von Null verschieden.
- (b) Die $m_\alpha(z)$ sind invariant gegenüber Decktransformationen: $(\beta m_\alpha)(z) = m_\alpha(z)$

Es existieren also holomorphe Funktionen f_α auf $\hat{X}$, so dass $\alpha F(z) = e^{f_\alpha(z)} F(z)$ und $(\beta f_\alpha)(z) - f_\alpha(z) \equiv 0 \pmod{2\pi i}$.

Eine allgemeinere Funktionenklasse sind die Theta-funktionen auf X . Darunter versteht man meromorphe Funktionen auf $\hat{X}$, für die zwar (a), aber nicht unbedingt (b) gilt. Statt (b) wird nur (b') gefordert:

- (b') Bei Anwendung einer Decktransformation β nimmt m_α eine von Null verschiedene Konstante $k_{\alpha\beta}$ als Faktor auf: $\beta \cdot m_\alpha = k_{\alpha\beta} m_\alpha$.

Für die Funktionen f_α gilt also nur noch:

$$\beta f_\alpha(z) - f_\alpha(z) = \text{konstant.}$$

(Vgl. K.Kodaira (9))

Der Divisor (F) einer Thetafunktion ist invariant gegenüber Decktransformationen (Eigenschaft (a)) und definiert daher einen Divisor D auf X mit $\hat{D} = (F)$. In einem solchen Fall schreiben wir auch $D = [F]$.

6.6 Wir kehren nun wieder zu den Überlegungen von 6.4 zurück. Wir hatten gesehen, dass zwei Lösungsfunktionen F und G eines gelifteten Divisors $\hat{D}$ die Relationen (A) und (B) erzwingen. Soll F nun noch eine Thetafunktion (multiplikative automorphe Funktion) sein, so kommen nach (b') bzw. (b) darüberhinaus die Relationen

$$(C) \quad \beta f_{\alpha}(z) - f_{\alpha}(z) = \text{konstant}, \quad \text{bzw.}$$

$$(CM) \quad \beta f_{\alpha}(z) - f_{\alpha}(z) \equiv 0 \pmod{2\pi i}$$

hinzu und zwar (CM) für den Fall, dass F multiplikativ automorph ist. Umgekehrt: Ist G eine vorgegebene Lösungsfunktion des Divisors $\hat{D}$ und gelingt es, Funktionen f_{α} und H' zu finden, sodass (A), (B) und (C) bzw. (CM) erfüllt sind, dann ist $F(z) := e^{-2\pi i H'(z)} G(z)$ eine Thetafunktion bzw. multiplikative automorphe Funktion mit $(F) = (G) = \hat{D}$.

Resultat:

Der aus einem Divisor D in einer komplex-analytischen Mannigfaltigkeit X durch Liften in die universelle Überlagerung $\hat{X}$ entstehende Divisor $\hat{D}$ besitze eine auf $\hat{X}$ meromorphe Lösungsfunktion G . Dann gilt:

Genau dann existiert eine Thetafunktion bzw. multiplikative automorphe Funktion F mit $[F] = D$, wenn es holomorphe Funktionen f_{α} und H' auf $\hat{X}$ gibt, sodass (A), (B) und (C) bzw. (CM) erfüllt sind,

§ 7. Die Kohomologieklassen $h_0(D)$ und $h(D)$.

7.1 Wir sahen in § 6, dass mit Hilfe zweier Lösungsfunktionen F und G eines gelifteten Divisors $\hat{D}$ Kozykeln $r = \delta(\varphi)$ und $r^* = \delta(\gamma) \in Z^2(\pi_1(X), Z)$ gewonnen werden können, deren Kohomologieklassen in $H^2(\pi_1(X), Z)$ wegen (2) übereinstimmen. Demnach definiert ein Divisor D in X immer dann eine Kohomologieklassse $h_0(D)$ in $H^2(\pi_1(X), Z)$, wenn der geliftete Divisor in der universellen Überlagerung lösbar ist. Zwischen dieser Kohomologieklassse $h_0(D)$ und dem Kohomologieelement $h(D) \in H^2(X, Z)$, das in 6.2 definiert wurde, soll nun eine Beziehung hergestellt werden.

7.2 $\mathcal{G}$ bezeichne eine der Garben $\mathcal{O}, \mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{V}$ oder eine konstante Garbe. Die Gruppe der Decktransformationen der universellen Überlagerung $\hat{X}$ über X operiert auf der Gruppe $H^0(\hat{X}, \mathcal{G})$:

$$(\alpha g)(z) := g(\alpha^{-1}z) \quad \alpha \in \pi_1(X), g \in H^0(\hat{X}, \mathcal{G})$$

Ferner existiert eine Spektralsequenz (E_r) (die sogenannte "Spektralsequenz einer Überlagerung") mit folgenden E_2 -Termen:

$$E_2^{p,q} = H^p(\pi_1(X), H^q(\hat{X}, \mathcal{G}))$$

Es gibt natürliche Homomorphismen $E_2^{i,0} \rightarrow H^i(X, \mathcal{G})$ ($i = 0, 1, 2$) und $H^i(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^i(\hat{X}, \mathcal{G})$ mit folgenden Eigenschaften:

Satz 7.1: (1) Folgende Sequenzen sind exakt:

$$0 \rightarrow E_2^{0,0} \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow H^1(X, \mathcal{G})$$

(2) Ist $H^1(\hat{X}, \mathcal{G}) = 0$, dann sind auch die Sequenzen

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow E_2^{2,0} \rightarrow H^2(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^2(\hat{X}, \mathcal{G})$$

exakt. (Man vergleiche hierzu: H.Cartan - Seminaire 51/52, Exposé XX von J.P.Serre, sowie Cartan - Eilenberg, Homological Algebra, Kapitel XV und XVI).

Die Exaktheit der Sequenz $0 \rightarrow E_2^{0,0} \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow 0$ ist klar: Sie bedeutet einfach, dass $H^0(X, \mathcal{G})$ zu derjenigen Untergruppe von $H^0(\hat{X}, \mathcal{G})$ isomorph ist, welche genau die Elemente enthält, die gegenüber Decktransformationen invariant sind (vgl. 1.3).

Für eine konstante Garbe $\mathcal{G} = G$ ist $H^1(\hat{X}, G) = 0$ und $H^0(\hat{X}, G) = G$, sodass aus (2) die exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow H^1(\pi_1(X), G) \rightarrow H^1(X, G) \rightarrow 0$$

$$(*) \quad 0 \rightarrow H^2(\pi_1(X), G) \xrightarrow{\varphi} H^2(X, G) \xrightarrow{\gamma} H^2(\hat{X}, G)$$

folgen. Die Sequenz (*) zieht eine bemerkenswerte Folgerung nach sich: Sei $G = \mathbb{Z}$. Ein Divisor D in einer komplex-analytischen Mannigfaltigkeit X definiert ein Kohomologieelement $h(D) \in H^2(X, \mathbb{Z})$. Damit nun der geliftete Divisor $\hat{D}$ auf $\hat{X}$ eine Lösung besitzt, ist es nach Satz 6.1 erforderlich, dass $h(\hat{D}) = \gamma(h(D))$ Null ist; das bedeutet, dass $h(D)$ im Bild von φ liegen muss: $h(D) = \varphi('h(D))$, $'h(D)$ ein geeignetes Element in $H^2(\pi_1(X), \mathbb{Z})$. $'h(D)$ ist durch $h(D)$ eindeutig bestimmt. Umgekehrt: Liegt $h(D)$ im Bild von φ , so ist

$h(\hat{D}) = \gamma(h(D))$ Null. Wenn nun $H^1(\hat{X}, \mathcal{O})$ verschwindet, so existiert nach Satz 6.1 zu $\hat{D}$ tatsächlich eine Lösungsfunktion. Ergebnis:

Satz 7.2: Ein Divisor D auf X kann nur dann auf r universellen Überlagerung $\hat{X}$ gelöst werden, wenn $h(D)$ im Bild des Homomorphismus $H^2(\pi_1(X), Z) \rightarrow H^2(X, Z)$ liegt. Diese Bedingung reicht dann auch hin, wenn $H^1(\hat{X}, \mathcal{O})$ die Nullgruppe ist.

7.3 Nach Abschnitt 7.1 gehört zu einem Divisor D auf X eine Kohomologieklass $h_0(D) \in H^2(\pi_1(X), Z)$, wenn der geliftete Divisor $\hat{D}$ auf $\hat{X}$ eine Lösungsfunktion besitzt. Andererseits gehört zu einem solchen Divisor eine Kohomologieklass $h(D) \in H^2(X, Z)$, die ein (eindeutig bestimmtes) Urbild $'h(D)$ in $H^2(\pi_1(X), Z)$ hat. Wir zeigen nun die Identität dieser beiden Elemente $h_0(D)$ und $'h(D)$.

Satz 7.3: Das Bild von $h_0(D)$ unter dem Monomorphismus $H^2(\pi_1(X), Z) \xrightarrow{\varphi} H^2(X, Z)$ ist $h(D)$, $\varphi(h_0(D)) = h(D)$.

B e w e i s : Wir übernehmen die Bezeichnungen des vorangehenden Paragraphen. - Aus der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow 0$$

erhält man die exakte Sequenz

$$(a) \quad 0 \rightarrow H^0(\hat{X}, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(\hat{X}, \mathcal{M}) \rightarrow H^0_*(\hat{X}, \mathcal{V}) \rightarrow 0$$

Dabei bedeute $H^0_*(\hat{X}, \mathcal{V})$ die Untergruppe von $H^0(\hat{X}, \mathcal{V})$, die gerade aus dem Bild von $H^0(\hat{X}, \mathcal{M}) \rightarrow H^0(\hat{X}, \mathcal{V})$ besteht. Anders ausgedrückt: $H^0_*(\hat{X}, \mathcal{V})$ ist die Gruppe derjenigen Divisoren auf $\hat{X}$, die lösbar sind. Da

$H^0(\pi_1(X), H^0_*(\hat{X}, \mathcal{V}))$ genau aus den Elementen von $H^0_*(\hat{X}, \mathcal{V})$ besteht, die gegenüber Decktransformationen invariant sind, ist $H^0(\pi_1(X), H^0_*(\hat{X}, \mathcal{V}))$ gerade die Gruppe der Divisoren D auf X , die in der universellen Überlagerung $\hat{X}$ gelöst werden können.

Sei nun D ein Divisor auf X mit $\hat{D} = (G)$, G eine meromorphe Funktion auf $\hat{X}$. Der aus (a) resultierende verbindende Homomorphismus

$$H^0(\pi_1(X), H^0_*(\hat{X}, \mathcal{V})) \rightarrow H^1(\pi_1(X), H^0(\hat{X}, \mathcal{F}))$$

ordnet (G) ein Element in $H^1(\pi_1(X), H^0(\hat{X}, \mathcal{F}))$ zu, d. i. eine Klasse von Systemen von Automorphiefaktoren, und zwar diejenige Klasse, die durch die Quotienten $\frac{\alpha G}{G}$ repräsentiert wird.

Ferner resultiert aus der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow Z \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

wegen $H^1(\hat{X}, Z) = 0$ die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow Z \rightarrow H^0(\hat{X}, \mathcal{O}) \rightarrow H^0(\hat{X}, \mathcal{F}) \rightarrow 0,$$

welche zu dem verbindenden Homomorphismus

$$H^1(\pi_1(X), H^0(\hat{X}, \mathcal{F})) \rightarrow H^2(\pi_1(X), Z)$$

Veranlassung gibt. Um die Wirkung dieses Homomorphismus' auf der Klasse, die durch die Automorphiefaktoren $\frac{\alpha G}{G}$ gegeben ist, zu erkennen, gehen wir so vor:

Wir bestimmen irgendwelche Zweige g'_α von $\frac{1}{2\pi i} \cdot \log\left(\frac{\alpha G}{G}\right)$ und bilden den Korand der durch die g'_α festgelegten 1-Kokette γ . Die Kohomologieklassse dieses (ganzzahligen) Kozykels $\delta(\gamma)$ ist das gesuchte

Bildelement. Das ist aber gerade $h_0(D)$. Wir halten fest: Das Bild von $\hat{D} = (G)$ unter dem zusammengesetzten Homomorphismus

$$H^0(\pi_1(X), H^0_{\times}(\hat{X}, \mathcal{F})) \rightarrow H^1(\pi_1(X), H^0(\hat{X}, \mathcal{F})) \rightarrow H^2(\pi_1(X), Z)$$

ist die Kohomologieklass $h_0(D)$.

Da die Kohomologieklass $h(D)$ durch den zusammengesetzten Homomorphismus

$$H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^2(X, Z)$$

definiert ist, ergibt sich die Behauptung des Satzes unmittelbar aus folgendem kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} H^0(\pi_1(X), H^0_{\times}(\hat{X}, \mathcal{F})) & \rightarrow & H^1(\pi_1(X), H^0(\hat{X}, \mathcal{F})) & \rightarrow & H^2(\pi_1(X), Z) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^0(X, \mathcal{F}) & \rightarrow & H^1(X, \mathcal{F}) & \rightarrow & H^2(X, Z) \end{array}$$

Dabei sind die senkrechten Homomorphismen gerade die Monomorphismen $E_2^{i,0} \rightarrow H^i(X, \mathcal{G})$ des Satzes 7.1. Ende des Beweises.

Fasst man $H^2(\pi_1(X), Z)$ als Untergruppe von $H^2(X, Z)$ auf, so sind wegen des soeben bewiesenen Satzes die Kohomologielemente $h_0(D)$ und $h(D)$ zu identifizieren. In diesem Sinn gebrauchen wir künftig das Symbol $h(D)$ in beiden Bedeutungen.

§ 8 Formulierung und Beweis der Hauptsätze.

Wir kommen nun zur Untersuchung der Frage der Lösbarkeit von (A), (B) und (C) bzw. (CM) durch Funktionen f_α und H' . Dabei seien γ und r durch eine Lösungsfunktion G des gelifteten Divisors $\hat{D}$ gegeben.

8.1 Das Problem (A):

Wir nehmen an, es sei uns bereits gelungen, holomorphe Funktionen f_α auf $\hat{X}$ anzugeben, sodass (C) bzw. (CM) erfüllt sind. Weiterhin soll die durch $\varphi(\alpha) := (2\pi i)^{-1} f_\alpha$ definierte 1-Kokette in $C^1(\pi_1(X), O_{\hat{X}})$ (B) erfüllen:

$$(B) \quad \delta(\gamma) = \delta(\varphi)$$

$\gamma - \varphi$ ist also ein 1-Kozyklus in $Z^1(\pi_1(X), O_{\hat{X}})$. Daher ist (A) genau dann durch eine holomorphe Funktion H' lösbar, wenn die Kohomologieklassse des Kozykels $\gamma - \varphi$ die Nullklasse in $H^1(\pi_1(X), O_{\hat{X}})$ ist. Ausführlicher: (A) ist genau dann lösbar, wenn das durch den Kozyklus $\gamma - \varphi$ definierte System von Automorphiesummanden $(2\pi i)^{-1}(g_\alpha - f_\alpha)$ das System von Automorphiesummanden einer holomorphen Funktion H' ist.

$\gamma - \varphi$ ist sicher dann ein Korand $\delta(H')$, wenn die Kohomologiegruppe $H^1(\pi_1(X), O_{\hat{X}})$ verschwindet. Diese Bedingung ist für eine umfangreiche Klasse von komplex-analytischen Mannigfaltigkeiten X erfüllt. Z.B. ist $H^1(\pi_1(X), O_{\hat{X}})$ immer dann 0, wenn $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ ist (Beweis in 8.5). Wir fassen zusammen:

(I) X sei eine komplex-analytische Mannigfaltigkeit mit $H^1(\pi_1(X), O_{\hat{X}}) = 0$. Können (B) und (C) bzw. (CM) durch Funktionen f_α gelöst werden, dann ist auch (A) lösbar.

8.2 Eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von (B) und (C) bzw. (CM):

f_α seien holomorphe Funktionen auf $\hat{X}$, die sowohl (B) als auch (C) bzw. (CM) erfüllen. Es soll also

$$h(\beta, \alpha) := \frac{1}{2\pi i} (\beta f_\alpha(z) - f_\alpha(z))$$

eine Konstante bzw. ganze rationale Zahl sein.

Behauptung: h ist bilinear.

Beweis: die Additivität in der ersten Variablen folgt aus

$$\beta \gamma f_\alpha(z) - f_\alpha(z) = \beta(\gamma f_\alpha(z) - f_\alpha(z)) + \beta f_\alpha(z) - f_\alpha(z).$$

Aus der soeben bewiesenen Additivität von h in der ersten Variablen folgt insbesondere: $(\beta \gamma) f_\alpha = (\gamma \beta) f_\alpha$

Diese Eigenschaft benutzen wir sogleich beim Nachweis der Additivität bezüglich der zweiten Variablen von

$$\beta f_{\alpha\gamma}(z) - f_{\alpha\gamma}(z) = \beta(\alpha f_\gamma(z) + f_\alpha(z)) - (\alpha f_\gamma(z) + f_\alpha(z))$$

Diese Gleichung folgt unmittelbar aus (B): $\delta(\varphi) = r$.

Wegen $\beta \alpha f_\gamma = \alpha \beta f_\gamma$, folgt hieraus weiter

$$= \alpha(\beta f_\gamma(z) - f_\gamma(z)) + (\beta f_\alpha(z) - f_\alpha(z)) = 2\pi i (h(\beta, \gamma) + h(\beta, \alpha))$$

Da die Funktionen f_α auch (B) erfüllen sollen, gilt:

$$r(\alpha, \beta) = h(\alpha, \beta) + \frac{1}{2\pi i} (f_\beta(z) - f_{\alpha\beta}(z) + f_\alpha(z))$$

$\text{Rea}(h)$ ist ein reellwertiger bilinearer 2-Kozyklus bzw. ein ganzzahliger bilinearer Kozyklus und ist deshalb auf Grund der Folgerungen aus Satz 4.3 bzw. 4.8 zu einem zerfallenden Kozyklus $z \in Z^2(\pi_1(X), R)$ (R : Körper der reellen Zahlen) kohomolog bzw. zu einem ganzzahligen zerfallenden Kozyklus z rationalzahlig kohomolog.

In beiden Fällen existieren jedenfalls reelle Zahlen $d(\alpha)$, sodass folgende Gleichung gilt:

$$\text{Rea}(h(\alpha, \beta)) = z(\alpha, \beta) + d(\beta) - d(\alpha\beta) + d(\alpha)$$

Wir wählen nun in $\hat{X}$ irgend einen Punkt z_0 und setzen $D(\alpha) := \text{Rea}\left(\frac{1}{2\pi i} f_\alpha(z_0)\right) + d(\alpha)$. Durch Zusammenfassen der letzten Gleichungen erhalten wir für den ganzzahligen Kozyklus r die Beziehung

$$r(\alpha, \beta) = z(\alpha, \beta) + (D(\beta) - D(\alpha\beta) + D(\alpha)).$$

r ist also zu dem zerfallenden Kozyklus z kohomolog. Ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ endlich-erzeugt, so darf z sogar als endliche Summe von Cup-Produkten von 1-Kozykeln bzw. von ganzzahligen 1-Kozykeln angenommen werden.

Noch zwei Bezeichnungen: Der von $Z \rightarrow R$ induzierte Homomorphismus $\varphi: H^2(X, Z) \rightarrow H^2(X, R)$ ordnet der Kohomologieklassse $h(D) \in H^2(X, Z)$, die durch den Divisor D gegeben ist, eine Kohomologieklassse in $H^2(X, R)$ zu. Das Bildelement nennen wir $H(D)$. - Eine Kohomologieklassse K in $H^2(\pi_1(X), R)$ heisst ganzzahlig-zerfallend, wenn als Repräsentant ein zerfallender Kozyklus $\sum_{\mu} u_{\mu} \cup v_{\mu}$ so gewählt werden kann, dass die 1-Kozykeln u_{μ} und v_{μ} nur ganze Zahlen als Werte annehmen.

Ergebnis von 8.2 (II): Ein Divisor D in einer komplex-analytischen Mannigfaltigkeit X , lässt sich nur dann durch eine Thetafunktion (multiplikative automorphe Funktion) F lösen, $D = [F]$, wenn $H(D)$ in der Untergruppe $H^2(\pi_1(X), R)$ von $H^2(X, R)$ liegt und zerfällt

(ganzzahlig zerfällt) :

$$H(D) = \sum_{\mu} h_{\mu} \cup h'_{\mu},$$

h_{μ} und $h'_{\mu} \in H^1(\pi_1(X), R)$ (bzw. $\in H^1(\pi_1(X), Z)$). Besitzt die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ ein endliches Erzeugendensystem, so bricht die Reihe in beiden Fällen ab.

8.3 Der geliftete Divisor $\hat{D}$ besitze eine auf $\hat{X}$ meromorphe Lösungsfunktion G , $\hat{D} = (G)$. Weiterhin machen wir die Annahme: $H^1(\pi_1(X), O_{\hat{X}}) = 0$. Dann gilt:

(III) Unter den genannten Voraussetzungen existiert immer dann eine Thetafunktion (m.a.Funktion) F mit $D = [F]$, wenn $H(D)$ zerfällt (ganzzahlig-zerfällt).

B e w e i s : Wir haben zu zeigen, dass unsere Voraussetzungen die Existenz von holomorphen Funktionen f_{α} und H' erzwingen, sodass (A), (B) und (C) bzw. (CM) erfüllt sind. Nach (I) reicht es aus, Funktionen f_{α} anzugeben, sodass (B) und (C) bzw. (CM) erfüllt sind.

Sei also $H(D)$ zerfallend (ganzzahlig zerfallend). Dann existieren Homomorphismen $u_{\mu}, v_{\mu} : \pi_1(X) \rightarrow R (Z)$ und reelle Zahlen $D(\alpha)$, sodass

$$r(\alpha, \beta) = \sum_{\mu} u_{\mu}(\alpha) v_{\mu}(\beta) + D(\beta) - D(\alpha\beta) + D(\alpha).$$

Dabei verschwinden für jedes β fast alle $v_{\mu}(\beta)$. Die 1-Kozykeln u_{μ} fassen wir als 1-Kozykeln in $Z^1(\pi_1(X), O_{\hat{X}})$ auf. Da nach Voraussetzung jeder Kozyklus dieser Gruppe ein Korand ist, existieren holomorphe Funktionen U_{μ} auf $\hat{X}$ mit $\alpha U_{\mu}(z) - U_{\mu}(z) = u_{\mu}(\alpha)$. Kurz: $u_{\mu} = \delta(U_{\mu})$. Entsprechend sind die Kozykeln v_{μ} die Koränder von

$\mathcal{O}$ -Koketten $V_\mu \in C^0(\pi_1(X), \mathcal{O}_X^\wedge)$, $v_\mu = \delta(V_\mu)$. Obige Darstellung von r kann also nun kohomologietheoretisch folgendermassen formuliert werden:

$$r = \sum_{\mu} \delta U_\mu \cup \delta V_\mu + \delta D.$$

Wir definieren nun eine Kokette $\varphi \in C^1(\pi_1(X), \mathcal{O}_X)$:

$$\varphi := \sum_{\mu} U_\mu \cup \delta V_\mu + D$$

Die Konvergenz der Reihe ist dadurch gesichert, dass für jedes α fast alle $\delta V_\mu(\alpha)$ Null sind. Offensichtlich gilt: $\delta(\varphi) = r$. Das ist gerade (B). Zu (C) bzw. (CM):

Die Definition von φ lautet ausführlich:

$$f_\alpha(z) = 2\pi i \cdot \left(\sum_{\mu} U_\mu(z) v_\mu(\alpha) + D(\alpha) \right).$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} \beta f_\alpha(z) - f_\alpha(z) &= 2\pi i \cdot \sum_{\mu} (\beta U_\mu(z) - U_\mu(z)) v_\mu(\alpha) \\ &= 2\pi i \cdot \sum_{\mu} u_\mu(\beta) v_\mu(\alpha) \end{aligned}$$

Die Differenz $\beta f_\alpha(z) - f_\alpha(z)$ ist also eine rein imaginäre Zahl bzw. ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$.

(C) bzw. (CM) ist erfüllt. Es existiert also eine Thetafunktion (multiplikative automorphe Funktion) F mit $\hat{D} = (F)$. Zusätzlich hat sich dabei folgendes gezeigt: Ist D durch eine Thetafunktion lösbar, dann kann sogar eine solche Thetafunktion F gefunden werden, für welche die Periodizitätsmoduln $k_{\alpha\beta}$ der Automorphiefaktoren $m_\alpha(z)$ von F komplexe Zahlen vom absoluten Betrag 1 sind und die ebenfalls D löst. Denn:

$$k_{\alpha\beta} = \frac{\beta m_\alpha(z)}{m_\alpha(z)} = e^{\beta f_\alpha(z) - f_\alpha(z)}$$

Ende des Beweises von III.

8.4 Durch Zusammenfassung von (I), (II) und (III) ergibt sich folgendes Kriterium:

SATZ I: X sei eine komplex-analytische Mannigfaltigkeit mit $H^1(\pi_1(X), \mathcal{O}_X^\wedge) = 0$. Der aus dem Divisor D in X durch Liften gewonnene Divisor $\hat{D}$ in der universellen Überlagerung $\hat{X}$ von X sei der Divisor einer auf $\hat{X}$ meromorphen Funktion G . Dann gilt:

- (1) D kann genau dann durch eine Thetafunktion gelöst werden, wenn $H(D)$ zerfällt.
- (2) D kann genau dann durch eine multiplikative automorphe Funktion gelöst werden, wenn $H(D)$ ganzzahlig zerfällt.

8.5 Für eine komplex-analytische Mannigfaltigkeit X verschwindet $H^1(\pi_1(X), \mathcal{O}_X^\wedge)$ immer dann, wenn $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$. Nach den Darlegungen von § 7 ist nämlich $H^1(\pi_1(X), \mathcal{O}_X^\wedge)$ Untergruppe von $H^1(X, \mathcal{O})$.

Die Eigenschaft " $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ " haben auf Grund des Theorems B von H. Cartan alle Stein'schen Mannigfaltigkeiten. Ebenso ist für eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit, deren erste Bettizahl verschwindet, $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ (vgl. (3)). Für alle diese Mannigfaltigkeiten liefert also Satz I ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz von Thetafunktionen bzw. multiplikativen automorphen Funktionen zu vorgegebenen Divisoren D auf X .

8.6 Bevor Satz I angewendet werden kann, ist stets nachzuprüfen, ob der aus einem Divisor D auf X gewonnene Divisor $\hat{D}$ der Divisor einer auf $\hat{X}$ meromorphen

Funktion ist. Wir untersuchen nun, inwieweit das überflüssig ist. Zu diesem Zweck eine Vorbemerkung:

Gegeben seien zwei eins-dimensionale Kohomologieklassen h^1 und k^1 aus $H^1(X, P)$, P ein kommutativer Ring mit Einselement. Diesen beiden Kohomologieklassen h^1 und k^1 sind durch die Isomorphie $H^1(X, P) \cong H^1(\pi_1(X), P)$ Elemente $'h^1$ und $'k^1$ in $H^1(\pi_1(X), P)$ zugeordnet. Es ist bekannt, dass der Homomorphismus $H^2(\pi_1(X), P) \xrightarrow{\varphi} H^2(X, P)$ das Cup-Produkt $'h^1 \cup 'k^1$ auf das Cup-Produkt $h^1 \cup k^1$ abbildet (vgl. B. Eckmann (4)). Allgemeiner ist eine

endliche Summe von Cup-Produkten von Kohomologieklassen $h_\mu^1, k_\mu^1 \in H^1(X, P)$ Bild einer Summe von Cup-Produkten von Kohomologieklassen $'h_\mu^1, 'k_\mu^1 \in H^1(\pi_1(X), P)$. Diese Tatsache motiviert folgende Definition: Eine Kohomologieklassse h^2 in $H^2(X, P)$ heisst zerfallend genau

dann, wenn eins-dimensionale Kohomologieklassen h_μ^1, k_μ^1 in $H^1(X, P)$ existieren, sodass die Reihe $\sum_\mu 'h_\mu^1 \cup 'k_\mu^1$ konvergiert und das φ -Bild der durch die Reihe dargestellten Kohomologieklassse $'h^2 \in H^2(\pi_1(X), P)$ gerade h^2 ist. In Zeichen: $h^2 = \sum_\mu h_\mu^1 \cup k_\mu^1$. - Es sei nun $P =$

$\mathbb{R}$ = Körper der reellen Zahlen. Eine Kohomologieklassse $h^2 \in H^2(X, \mathbb{R})$ heisst ganzzahlig-zerfallend, wenn h^2 zerfällt und wenn es möglich ist die h_μ^1 und k_μ^1 einer Darstellung $h^2 = \sum_\mu h_\mu^1 \cup k_\mu^1$ so zu wählen, dass sie im Bild von $H^1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathbb{R})$ liegen.

Eine zerfallende Kohomologieklassse $h^2 \in H^2(X, \mathbb{R})$ liegt stets im Bild des Homomorphismus $H^2(\pi_1(X), \mathbb{R}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{R})$ und gehört daher wegen der Exaktheit der Sequenz

$0 \rightarrow H^2(\pi_1(X), \mathbb{R}) \xrightarrow{\varphi} H^2(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{\gamma} H^2(\hat{X}, \mathbb{R})$ zum Kern von γ .

SATZ II: X sei eine komplex-analytische Mannigfaltigkeit mit $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ und $H^1(\hat{X}, \mathcal{O}) = 0$. Es gilt:

- (1) Ein Divisor D auf X kann genau dann durch eine Thetafunktion gelöst werden, wenn das durch D bestimmte Kohomologieelement $H(D)$ aus $H^2(X, \mathbb{R})$ zerfällt.
- (2) Ein Divisor D auf X kann genau dann durch eine multiplikative automorphe Funktion gelöst werden, wenn $H(D)$ ganzzahlig zerfällt.

Die Voraussetzung des Satzes erfüllen beispielsweise alle Steinschen Mannigfaltigkeiten. Denn mit X ist auch die universelle Überlagerung $\hat{X}$ eine Steinsche Mannigfaltigkeit.

Beweis des Satzes II:

Die exakte Sequenz $0 \rightarrow Z \rightarrow R \rightarrow P \rightarrow 0$ (P sei die additive Gruppe der reellen Zahlen mod 1) gibt Veranlassung zu einem exakten und kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & H^2(\pi_1(X), \mathbb{R}) \\
 & & & & \downarrow \varphi \\
 & & H^2(X, Z) & \xrightarrow{\alpha} & H^2(X, \mathbb{R}) \\
 & & \gamma' \downarrow & & \gamma \downarrow \\
 H^1(\hat{X}, P) & \rightarrow & H^2(\hat{X}, Z) & \xrightarrow{\hat{\alpha}} & H^2(\hat{X}, \mathbb{R})
 \end{array}$$

Der Homomorphismus $\hat{\alpha}$ ist injektiv:

Nach dem universellen Koeffiziententheorem gilt:

$$H^1(\hat{X}, P) \cong \text{Hom}(H_1(\hat{X}), P) + \text{Ext}(H_0(\hat{X}), P)$$

Beide Summanden sind Null. Der erste deshalb, weil $\hat{X}$ einfach zusammenhängend ist, der zweite ist Null, weil P divisibel ist. Daraus folgt, dass der Kern von $\hat{\alpha}$ nur aus dem Nullelement besteht.

Sei nun D auf X beliebig vorgegeben. Ist $\alpha(h(D)) = H(D)$ zerfallend (ganzzahlig zerfallend), so liegt $H(D)$ im Bild von φ . Daraus folgt: $\gamma\alpha(h(D)) = \hat{\alpha}\gamma'(h(D)) = 0$. Da $\hat{\alpha}$ injektiv ist, gilt: $\gamma'(h(D)) = 0$.

Nach Serre (Satz 6.1) besitzt also der geliftete Divisor $\hat{D}$ auf $\hat{X}$ eine Lösungsfunktion. Beachtet man nun noch 8.5, so folgt aus Satz I, dass zu D eine Thetafunktion (multiplikative automorphe Funktion) existiert. Die Bedingungen sind also hinreichend. Wegen Satz I sind sie auch notwendig.

FOLGERUNGEN

Dieses dritte Kapitel bringt zunächst einige Anwendungen des Satzes I. Hieran schliessen sich Untersuchungen über die Lösbarkeit von Divisoren in Produkten Stein'scher Mannigfaltigkeiten durch Thetafunktionen bzw. multiplikative automorphe Funktionen. Der letzte Paragraph handelt von geometrischen Bedeutungen der Hauptsätze.

§9. Anwendungen des Satzes I.

Satz 9.1: Die Fundamentalgruppe der komplex-analytischen Mannigfaltigkeit X mit $H^1(\pi_1(X), O_X^\times) = 0$ sei zur Fundamentalgruppe einer orientierbaren geschlossenen Fläche isomorph. Dann gilt: Besitzt ein Divisor D auf X auf der universellen Überlagerung $\hat{X}$ von X eine Lösungsfunktion, dann besitzt er sogar eine multiplikative automorphe Lösungsfunktion.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus Satz I in Verbindung mit Satz 2.1

Satz 9.2: X sei eine komplex-analytische Mannigfaltigkeit mit $H^1(\pi_1(X), O_X^\times) = 0$. Die Fundamentalgruppe lasse sich durch Erzeugende x_i mit genau einer nicht-trivialen Relation $r = x_1^{n_1} \dots x_s^{n_s} = 1$ darstellen, r kein Kommutator. Es gilt: Ist der Divisor D auf X auf der universellen Überlagerung lösbar, dann ist er auch durch eine multiplikative automorphe Funktion lösbar.

Beweis: Aus einem Satz von R. Lyndon folgt, dass jedes

Element in $H^2(\pi_1(X), R)$ (R = Körper der reellen Zahlen) ganzzahlig zerfällt. (Vgl. (11a)). Aus Satz I folgt nun unmittelbar die Behauptung.

SATZ III: Die Fundamentalgruppe der komplex-analytischen Mannigfaltigkeit X sei abelsch. Ferner verschwinde die Gruppe $H^1(\pi_1(X), O_X^\wedge)$. Dann gilt:
Ein Divisor D auf X besitzt genau dann eine multiplikative automorphe Lösungsfunktion, wenn der geliftete Divisor $\hat{D}$ gelöst werden kann.

Beweis: Nach Satz 4.9 zerfällt jedes Element in $H^2(\pi_1(X), R)$ ganzzahlig. Auf Grund von Satz I ist daher die angegebene Bedingung hinreichend. Ihre Notwendigkeit ist klar.

Da für eine Stein'sche Mannigfaltigkeit X stets die Kohomologiegruppe $H^1(\pi_1(X), O_X^\wedge)$ verschwindet, folgt:

SATZ IV: Die Fundamentalgruppe der Stein'schen Mannigfaltigkeit X sei abelsch. Ein Divisor D auf X besitzt genau dann eine multiplikative automorphe Lösungsfunktion, wenn D auf der universellen Überlagerung gelöst werden kann.

SATZ V: Genau dann existiert zu einem Divisor D in einer Stein'schen Mannigfaltigkeit eine holomorphe Thetafunktion (m.a.Funktion), wenn es eine stetige Thetafunktion (m.a.Funktion) zu D gibt.

"Stetige Thetafunktion" und "stetige m.a.Funktion" sind analog zu "holomorphe Thetafunktion" und "holomorphe multiplikative automorphe Funktion" definiert.

Beweis: Es existiere zu D eine stetige Thetafunktion (m.a.Funktion). Da es zu dem gelifteten Divisor $\hat{D}$ eine stetige Funktion mit den vorgeschriebenen Nullstellen gibt, existiert nach K.Oka (vgl. (12)) zu $\hat{D}$ auch eine auf $\hat{X}$ holomorphe Funktion.

Betrachtet man nun die Methode, nach welcher mittels einer holomorphen Lösungsfunktion von $\hat{D}$ die Kohomologieklassse $H(D)$ gewonnen wurde, so stellt man fest, dass dabei von der Holomorphieeigenschaft der Lösungsfunktion gar nicht Gebrauch gemacht wurde. $H(D)$ lässt sich also bereits mit Hilfe der stetigen Thetafunktion (m.a.Funktion) zu D gewinnen. Überprüft man weiterhin den Abschnitt 8.2, in dem gezeigt wird, dass nur dann eine holomorphe Thetafunktion (m.a. Funktion) zu einem Divisor existiert, wenn $H(D)$ zerfällt, so zeigt es sich, dass auch dabei nirgends die Holomorphie der Thetafunktion (m.a.Funktion) benützt wird. Demnach ist das Ergebnis von 8.2 auch für stetige Thetafunktionen (m.a.Funktionen) gültig. Da nach Voraussetzung eine stetige Thetafunktion (m.a. Funktion) zu D existiert, zerfällt $H(D)$ (zerfällt $H(D)$ ganz-zahlig). Nach Satz I existiert daher zu D eine holomorphe Thetafunktion (m.a.Funktion).

§ 10. Thetafunktionen und multiplikative automorphe Funktionen zu Divisoren in Produkten Steinscher Mannigfaltigkeiten.

Alle in diesem Paragraphen vorkommenden Mannigfaltigkeiten $X, Y, \dots$ seien Steinsche Mannigfaltigkeiten. Ihre universellen Überlagerungen sind ebenfalls Steinsche Mannigfaltigkeiten und es gilt: $\widehat{X \times Y} = \widehat{X} \times \widehat{Y}$. Wir erinnern kurz an eine bekannte Eigenschaft Steinscher Mannigfaltigkeiten: Zu jeder Kohomologieklassse $u \in H^2(X, \mathbb{Z})$ existiert ein Divisor D in X mit $u(D) = u$ (vgl. Serre (13)).

Satz 10.1: Alle gelifteten Divisoren auf $\widehat{X}$ bzw. $\widehat{Y}$ seien die Divisoren meromorpher Funktionen (auf $\widehat{X}$ bzw. $\widehat{Y}$). Dann ist jeder geliftete Divisor in $\widehat{X \times Y}$ durch eine meromorphe Funktion lösbar.

Beweis: Nach Paragraph 7 bedeutet die Voraussetzung unseres Satzes, dass die Homomorphismen $H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\widehat{X}, \mathbb{Z})$ und $H^2(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\widehat{Y}, \mathbb{Z})$ die Nullhomomorphismen sind. Umgekehrt erfordert die Behauptung des Satzes den Nachweis, dass der Kern von $H^2(X \times Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\widehat{X \times Y}, \mathbb{Z})$ ganz $H^2(X \times Y, \mathbb{Z})$ ist. Wegen des universellen Koeffiziententheorems und der Künneth-Relationen gilt:

$$\begin{aligned} H^2(X \times Y, \mathbb{Z}) &\cong \text{Hom}(H_2(X) \otimes H_2(Y), \mathbb{Z}) + \text{Hom}(H_1(X) \otimes H_1(Y), \mathbb{Z}) \\ &\quad + \text{Hom}(H_0(X) \otimes H_2(Y), \mathbb{Z}) + \text{Ext}(H_1(X \times Y), \mathbb{Z}) \\ &\quad + \text{Hom}(\text{Tor}(H_1(X), H_0(Y)), \mathbb{Z}) + \text{Hom}(\text{Tor}(H_0(X), H_1(Y)), \mathbb{Z}) \\ &= H^2(X, \mathbb{Z}) + \text{Hom}(H_1(X) \otimes H_1(Y), \mathbb{Z}) + H^2(Y, \mathbb{Z}) + \text{Ext}(H_1(X \times Y), \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass $H_0(X) \cong \mathbb{Z} \cong H_0(Y)$ und dass

$\text{Tor}(*, *) = 0$ ist, wenn eine der Argumentgruppen die Gruppe der ganzen Zahlen ist. Analog gilt:

$$H^2(\widehat{X \times Y}, Z) = H^2(\hat{X}, Z) + H^2(\hat{Y}, Z)$$

weil ausserdem $H_1(\hat{X})$, $H_1(\hat{Y})$ und $H_1(\widehat{X \times Y})$ Null sind.

Also setzt sich der Homomorphismus $H^2(X \times Y, Z) \rightarrow H^2(\widehat{X \times Y}, Z)$ aus $H^2(X, Z) \rightarrow H^2(\hat{X}, Z)$ und $H^2(Y, Z) \rightarrow H^2(\hat{Y}, Z)$ zusammen und ist deshalb der Nullhomomorphismus.

Seien nun X und Y Steinsche Mannigfaltigkeiten, auf denen jeder Divisor durch eine Thetafunktion gelöst werden kann. Der vorangehende Satz lehrt, dass dann auch jeder Divisor in $X \times Y$ auf der universellen Überlagerung von $X \times Y$ lösbar ist und zwar kann als Lösungsfunktion sogar eine Thetafunktion gefunden werden. Um das zu beweisen, geben wir eine spezielle Lösung der Gleichungssysteme (B) und (C) aus § 6 an.

Durch einen Divisor D in $X \times Y$ ist eine Kohomologieklass $h(D)$ in $H^2(\pi_1(X) \times \pi_1(Y), Z)$ bestimmt, die durch einen normalen Kozyklus r aus $Z^2(\pi_1(X) \times \pi_1(Y), Z)$ repräsentiert sein möge (siehe Satz 1.3). (r und damit $h(D)$ seien mit Hilfe irgendeiner Lösungsfunktion G von $\hat{D}$ gewonnen.)

$$r(\alpha\beta, b\beta) = r(\alpha, \beta) + r(a, \beta) + r(a, b)$$

($a, b \in \pi_1(X)$; $\alpha, \beta \in \pi_1(Y)$). Durch die $r(a, b)$ und die $r(\alpha, \beta)$ sind Kohomologieklassen $H' \in H^2(\pi_1(X), R)$ und $H'' \in H^2(\pi_1(Y), R)$ definiert, die deshalb zerfallen müssen, weil es in X und Y Divisoren gibt, die diese Koho-

mologieklassen H' und H'' induzieren und die ausserdem auf Grund der Voraussetzung durch Thetafunktionen gelöst werden können. Also:

$$r(a, b) = \sum_{\mu} u'_{\mu}(a) v'_{\mu}(b) + d'(a) - d'(ab) + d'(b)$$

$$r(\alpha, \beta) = \sum_{\mu} u''_{\mu}(\alpha) v''_{\mu}(\beta) + d''(\alpha) - d''(\alpha\beta) + d''(\beta)$$

$$u'_{\mu}, v'_{\mu} \in \text{Hom}(\pi_1(X), R); \quad u''_{\mu}, v''_{\mu} \in \text{Hom}(\pi_1(Y), R).$$

Ferner folgt aus Satz 1.4 und Satz 4.1 die Existenz von Homomorphismen $u_{\mu} \in \text{Hom}(\pi_1(X), R)$, $v_{\mu} \in \text{Hom}(\pi_1(Y), R)$ mit

$$r(a, \beta) = \sum_{\mu} u_{\mu}(a) v_{\mu}(\beta).$$

(Die Konvergenz kommt in allen Fällen dadurch zustande, dass für irgend ein Argument fast alle Homomorphismen den Wert 0 annehmen.) Da X und Y Stein'sche Mannigfaltigkeiten sind, existieren auf $\hat{X}$ holomorphe Funktionen $U_{\mu}, U'_{\mu}, V'_{\mu}$ mit den Eigenschaften:

$$a \cdot U_{\mu}(x) - U_{\mu}(x) = u_{\mu}(a)$$

$$a \cdot U'_{\mu}(x) - U'_{\mu}(x) = u'_{\mu}(a) \quad a \in \pi_1(X).$$

$$a \cdot V'_{\mu}(x) - V'_{\mu}(x) = v'_{\mu}(a)$$

und auf $\hat{Y}$ holomorphe Funktionen $U''_{\mu}, V''_{\mu}, V_{\mu}$ mit den Eigenschaften:

$$\alpha \cdot U''_{\mu}(y) - U''_{\mu}(y) = u''_{\mu}(\alpha)$$

$$\alpha \cdot V''_{\mu}(y) - V''_{\mu}(y) = v''_{\mu}(\alpha)$$

$$\alpha \cdot V_{\mu}(y) - V_{\mu}(y) = v_{\mu}(\alpha)$$

Wir fassen nun diese Funktionen $U_{\mu}, \dots, V''_{\mu}$ als Funktionen auf $\widehat{X \times Y}$ auf und definieren mit ihnen eine 1-Kokette $\varphi \in C^1(\pi_1(X) \times \pi_1(Y), 0_{\widehat{X \times Y}})$ durch

$$\varphi := \sum_{\mu} (U'_{\mu} \cup \delta V'_{\mu} + U_{\mu} \cup \delta V_{\mu} + U''_{\mu} \cup \delta V''_{\mu}) + d' + d''$$

Offensichtlich erfüllt diese Kokette φ das Gleichungs-

system (B): $\delta\varphi = r$.

Ausführlich geschrieben lautet die Definition von φ :

$$f_{a\alpha}(x, y) = 2\pi i \left[\sum_{\mu} (U'_{\mu}(x) v'_{\mu}(a) + U_{\mu}(x) v_{\mu}(\alpha) + U''_{\mu}(y) v''_{\mu}(\alpha)) + d'(a) + d''(\alpha) \right]$$

Daraus folgt:

$$(b\beta) \cdot f_{a\alpha}(x, y) - f_{a\alpha}(x, y) = 2\pi i \cdot \left[\sum_{\mu} u'_{\mu}(b) v'_{\mu}(a) + r(b, \alpha) + \sum_{\mu} u''_{\mu}(\beta) v''_{\mu}(\alpha) \right]$$

Es ist also auch (C) erfüllt.

Nach den Darlegungen von § 6 und 8.1 folgt somit die Existenz einer Thetafunktion F zu dem vorgegebenen Divisor in $X \times Y$. Die Automorphiefaktoren $\frac{(a\alpha)F(x, y)}{F(x, y)}$ dieser Thetafunktion haben die besondere Gestalt:

$$(*) \quad f_{a\alpha}(x, y) = e^{f'_a(x)} \cdot e^{f^*_{\alpha}(x)} \cdot e^{f''_{\alpha}(y)}$$

Dabei setzen wir:

$$f'_a(x) := 2\pi i \left[\sum_{\mu} U'_{\mu}(x) v'_{\mu}(a) + d'(a) \right]$$

$$f^*_{\alpha}(x) := 2\pi i \cdot \sum_{\mu} U_{\mu}(x) v_{\mu}(\alpha)$$

$$f''_{\alpha}(y) := 2\pi i \left[\sum_{\mu} U''_{\mu}(y) v''_{\mu}(\alpha) + d''(\alpha) \right]$$

Wegen $a \cdot f^*_{\alpha}(x) - f^*_{\alpha}(x) = 2\pi i \cdot \sum_{\mu} u_{\mu}(a) v_{\mu}(\alpha) = 2\pi i \cdot r(a, \alpha)$ kann $e^{f^*_{\alpha}}$ als eindeutige Funktion in X aufgefaßt werden. Die beiden anderen Faktoren $e^{f'_a}$ und $e^{f''_{\alpha}}$ nehmen bei Fortsetzung längs eines Weges in X bzw. Y konstante Faktoren vom absoluten Betrag 1 auf.

Wir nehmen nun an, dass alle Divisoren in X und Y sogar durch multiplikative automorphe Funktionen gelöst werden können. Dann zerfallen die Kohomologieklassen $H' \in H^2(\pi_1(X), \mathbb{R})$ und $H'' \in H^2(\pi_1(Y), \mathbb{R})$ ganzzahlig und

1) Genauer: ..längs geschlossener Wege ..

die Funktionen $e^{f'_a}$ und $e^{f''_a}$ sind eindeutige Funktionen auf X bzw. Y , sodass F in diesem Fall sogar multiplikativ automorph ist.

Wir fassen zusammen:

SATZ VI: Alle Divisoren auf den Stein'schen Mannigfaltigkeiten X und Y seien durch Thetafunktionen lösbar. Dann kann jeder Divisor auf $X \times Y$ durch eine Thetafunktion F gelöst werden, deren Automorphiefaktoren $\frac{(2\alpha)F(x,y)}{F(x,y)}$ die Gestalt

$$e^{f_{2\alpha}(x,y)} = e^{f'_a(x)} \cdot e^{f^*_\alpha(x)} \cdot e^{f''_a(y)}$$

haben. $e^{f^*_\alpha(x)}$ ist eine eindeutige Funktion auf X .

Sind alle Divisoren auf X und Y durch multiplikative automorphe Funktionen lösbar, dann sind auch die Funktionen $e^{f'_a(x)}$ bzw. $e^{f''_a(y)}$ eindeutig in X bzw. Y , sodass F in diesem Fall multiplikativ automorph ist.

Wenn ausserdem $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$ ist, dann ist $H' = 0$ und aus der Konstruktion von f'_a ergibt sich: $e^{f'_a} = 1$. In diesem Fall bleibt F eindeutig, solange man nur längs geschlossener Wege in X fortsetzt. Als Faktor wird nämlich $e^{f^*_\varepsilon} \cdot e^{f''_\varepsilon}$ (ε = Einheitselement in $\pi_1(Y)$) aufgenommen. $f^*_\varepsilon = 0$, $f''_\varepsilon = 2\pi i \cdot d''(\varepsilon) = 2\pi i \cdot r(\varepsilon, \varepsilon)$. Hieraus folgt die Behauptung.

Entsprechend ist $e^{f''_a} = 1$, wenn $H^2(Y, \mathbb{Z})$ verschwindet. Setzt man also F längs eines geschlossenen Weges in Y fort und hält dabei die X -Koordinate fest, so nimmt F den Faktor $e^{f'_1(x)} \cdot e^{f^*_\alpha(x)} = e^{f^*_\alpha(x)}$ auf.

Dabei ist α die Homotopieklasse des Fortsetzungsweges in Y . Da $\exp(f_\alpha^*)$ eine eindeutige Funktion auf X ist, hängt sie sogar nur von der Homotopieklasse des Weges ab, längs dessen fortgesetzt wird.

Is Zusammenfassung der beiden letzten Bemerkungen formulieren wir folgenden

SATZ VII: Es seien X und Y zwei Stein'sche Mannigfaltigkeiten mit $H^2(X, Z) = 0$ und $H^2(Y, Z) = 0$. Dann kann jeder Divisor in $X \times Y$ durch eine multiplikative automorphe Funktion F gelöst werden, wobei F folgende Eigenschaften hat:

(1) Hält man y fest, dann ist $F(x, y)$ eine eindeutige Funktion von x .

(2) Wird F bei festem x längs eines geschlossenen Weges w in Y fortgesetzt, so nimmt F einen Faktor $e^{f_\alpha^*(x)}$ auf, der nur von x und von der Homotopieklasse des Weges w abhängt:

$$e^{f_\alpha^*(x)} \cdot F(x, y) = e^{f_\alpha^*(x)} \cdot F(x, y)$$

$e^{f_\alpha^*(x)}$ ist eine eindeutige holomorphe Funktion auf X

Die Voraussetzungen des Satzes erfüllen z.B. zwei offene Riemannsche Flächen X und Y . Dieser Fall wurde bereits früher von K. Stein behandelt (14a).

Analoge Resultate gelten für direkte Produkte von n Stein'schen Mannigfaltigkeiten $X_1, \dots, X_n$, in denen jeder Divisor durch eine Thetafunktion bzw. m.a. Funktion bzw. eindeutige Funktion lösbar ist. Die Beweise laufen analog zu den obigen. Wir führen deshalb nur

die Ergebnisse an:

SATZ VIa : Alle Divisoren auf den Steinschen Mannigfaltigkeiten $X_1, \dots, X_n$ seien durch Thetafunktionen lösbar. Dann kann jeder Divisor im direkten Produkt $X_1 \times \dots \times X_n$ durch eine Thetafunktion F gelöst werden, deren Automorphiefaktoren

$$\frac{(\alpha_1 \cdots \alpha_n) \cdot F(x_1, \dots, x_n)}{F(x_1, \dots, x_n)}$$

folgende Gestalt haben:

$$\frac{(\alpha_1 \cdots \alpha_n) \cdot F(x_1, \dots, x_n)}{F(x_1, \dots, x_n)} = \prod_{i=1}^n e^{f_{\alpha_i}(x_i)} \prod_{k=2}^n \prod_{j=k}^n e^{f'_{\alpha_j}(x_{k-1})}$$

$\alpha_i \in \pi_1(X_i)$. Die Funktionen $\exp(f_{\alpha_i}(x_i))$ sind holomorphe multiplikative automorphe Funktionen auf X_i , deren Periodizitätsmoduln Konstante vom absoluten Betrag 1 sind. - Die Funktionen $\exp(f'_{\alpha_j}(x_{k-1}))$ sind eindeutig und holomorph auf X_{k-1} und hängen nur von der Divisionshomologiekategorie des Elementes α_j aus $\pi_1(X_j)$ ab.

Lässt sich jeder Divisor in X_i durch eine multiplikative automorphe Funktion lösen, dann sind die Funktionen $e^{f_{\alpha_i}(x_i)}$ eindeutig auf X_i . - Sind alle Divisoren auf X_i sogar durch eindeutige Funktionen lösbar, dann gilt für alle $\alpha_i \in \pi_1(X_i)$: $\exp(f_{\alpha_i}(x_i)) = 1$.

§ 11. Geometrische Interpretationen der Hauptsätze

11.1 X sei eine komplexe Mannigfaltigkeit und D ein Divisor in ihr. D bestimmt in X eine Menge V^{2n-2} von $(2n-2)$ -dimensionalen Flächen, die sich im Innern von X nicht häufen, nämlich die Null- und Polstellenflächen des Divisors (n bezeichne die komplexe Dimension von X). Die einzelnen Flächenstücke von V^{2n-2} lassen sich in natürlicher Weise mit Orientierung und Ordnung versehen. Die Schnittzahlen von V^{2n-2} mit den 2-dimensionalen Zykeln in X hängen nur von der Homologieklassse dieser Zykeln ab. (Vgl. K. Stein (14)). Dadurch wird ein Homomorphismus $s(D): H_2(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ festgelegt. Dieser ist bekanntlich mit demjenigen Homomorphismus aus $\text{Hom}(H_2(X), \mathbb{Z})$ identisch, der der Kohomologieklassse $h(D) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ vermöge des universellen Koeffiziententheorems zugeordnet ist. Diese Tatsache hat eine wichtige Konsequenz: Für eine einfach-zusammenhängende komplex-analytische Mannigfaltigkeit X gilt $H^2(X, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_2(X), \mathbb{Z}) = \text{Hom}(S_2(X), \mathbb{Z})$ (siehe 5.3). Die Kohomologieklassse $h(D)$ eines Divisors D in X ist also genau dann 0, wenn die Schnittzahlen von D mit allen 2-Sphären verschwinden. (Unter der Schnittzahl eines Divisors mit einem 2-Zyklus oder mit einer 2-dimensionalen Homologieklassse verstehen wir die Schnittzahl von V^{2n-2} mit diesen Elementen.) Ist ferner $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$, so folgt wegen Satz 6.1:

Satz 11.1: Ein Divisor D in einer komplex-analytischen, einfach-zusammenhängenden Mannigfaltigkeit X

kann nur dann der Divisor einer meromorphen Funktion auf X sein, wenn die Schnittzahlen von D mit allen 2-Sphären in X verschwinden. Diese Bedingung ist auch hinreichend, wenn $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ ist.

Ist $\hat{X}$ die universelle Überlagerung einer Mannigfaltigkeit X , so ist, wenn unter p die Projektionsabbildung $\hat{X} \rightarrow X$ verstanden wird, $p(S_2(\hat{X})) \cong S_2(X)$. Aus Satz 11.1 folgt daher:

Satz 11.2: Ein Divisor D auf einer komplex-analytischen Mannigfaltigkeit X kann höchstens dann auf der universellen Überlagerung von X gelöst werden, wenn die Schnittzahlen von D mit allen 2-Sphären in X verschwinden. Wenn $H^1(\hat{X}, \mathcal{O}) = 0$ ist, reicht diese Bedingung auch hin.

11.2 Die exakte Sequenz $0 \rightarrow S_2(X) \rightarrow H_2(X) \rightarrow H_2(\pi) \rightarrow 0$ (π sei die Fundamentalgruppe von X) induziert die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Hom}(H_2(\pi), \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(H_2(X), \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(S_2(X), \mathbb{Z}).$$

Wenn nun der Divisor D auf X in der universellen Überlagerung $\hat{X}$ gelöst werden kann, dann verschwindet nach Satz 11.2 der Homomorphismus $s(D)$ auf allen 2-Sphären. $s(D)$ lässt sich daher als Element von $\text{Hom}(H_2(\pi), \mathbb{Z})$ auffassen. $s(D)$ ist das Element, das der Kohomologiekategorie $h(D) \in H^2(\pi_1(X), \mathbb{Z})$ auf Grund des universellen Koeffiziententheorems in der Gruppe $\text{Hom}(H_2(\pi), \mathbb{Z})$ zugeordnet ist. (Vgl. § 5).

Sei π_a die abelsch-gemachte Fundamentalgruppe und $\mathbb{Q}$ der Körper der reellen Zahlen. Wir haben dann ein

kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^2(\pi_a, Z) & \rightarrow & H^2(\pi_a, Q) \\ \downarrow & & \downarrow \beta \\ H^2(\pi, Z) & \xrightarrow{\alpha} & H^2(\pi, Q) \end{array}$$

D sei ein Divisor auf X , der in der universellen Überlagerung von X eine Lösung besitzt. Die zu D gehörige Kohomologieklassse $h(D)$ liegt also in $H^2(\pi, Z)$. Nach 8.2 gibt es zu D höchstens dann eine Thetafunktion als Lösung, wenn $H(D) = \alpha(h(D)) \in H^2(\pi, Q)$ zerfällt. Umgekehrt zeigt Satz II, dass das Zerfallen von $H(D)$ für die Existenz einer gesuchten Thetafunktion auch hinreicht, wenn $H^1(X, \mathcal{O})$ und $H^1(\hat{X}, \mathcal{O})$ Null sind. Ferner: Satz 4.4 lehrt, dass die Untergruppe der zerfallenden Elemente in $H^2(\pi, Q)$ genau das Bild von β ist. Unser Ziel ist deshalb eine Charakterisierung derjenigen Kohomologieklassen $h \in H^2(\pi, Z)$, für die $\alpha(h)$ im Bild von β liegt.

Da Q divisibel ist, sind $\text{Ext}(H_1(\pi), Q)$ und $\text{Ext}(H_1(\pi_a), Q)$ Null. Aus diesem Grund setzen sich die Homomorphismen $H^2(\pi, Z) \rightarrow H^2(\pi, Q)$ und $H^2(\pi_a, Z) \rightarrow H^2(\pi_a, Q)$ aus den Homomorphismen $\text{Hom}(H_2(\pi), Z) \rightarrow \text{Hom}(H_2(\pi), Q)$, $\text{Hom}(H_2(\pi_a), Z) \rightarrow \text{Hom}(H_2(\pi_a), Q)$ und den Nullhomomorphismen $\text{Ext}(*, Z) \rightarrow 0$ zusammen. Insbesondere gilt: $\alpha(h(D)) = \alpha(s(D)) = H(D)$. Die gesuchte Charakterisierung läuft also auf folgende Frage hinaus: Unter welchen Bedingungen gibt es zu einem ganzzahligen Homomorphismus $s: H_2(\pi) \rightarrow Z$ einen reellwertigen Homomorphismus $s': H_2(\pi_a) \rightarrow Q$, sodass folgende Gleichung gilt: $S = s' \beta'(S$ und β' seien gegeben durch

$H_2(\pi) \xrightarrow{s} Z \rightarrow Q$ bzw. $H_2(\pi) \rightarrow H_2(\pi_a)$?

Antwort: Ein gesuchter Homomorphismus s' existiert genau dann, wenn s auf dem Kern von β' verschwindet

Die Notwendigkeit dieser Bedingung ist klar. Dass sie auch hinreichend ist, erkennt man so: Verschwindet s (und damit S) auf dem Kern von β' , so gibt S Anlass zu einem reellwertigen Homomorphismus der Faktorgruppe $H_2(\pi) / \text{Kern}(\beta')$, $S^*: H_2(\pi) / \text{Kern}(\beta') \rightarrow Q$. Der Homomorphismus β' induziert einen Monomorphismus

$$H_2(\pi) / \text{Kern}(\beta') \rightarrow H_2(\pi_a).$$

Da Q divisibel ist, kann S^* zu einem Homomorphismus $s' : H_2(\pi_a) \rightarrow Q$ "fortgesetzt" werden. s' leistet das Gewünschte. q.e.d.

11.3 Bestimmung des Kernes von $\beta' : H_2(\pi) \rightarrow H_2(\pi_a)$.

Wir fassen die komplex-analytische Mannigfaltigkeit X als Polyederraum auf. (Für jede differenzierbare Mannigfaltigkeit ist dies möglich. Vgl. Lefschetz (10)). Die Fundamentalgruppe F des zugehörigen Kantenskomplexes X^1 ist frei und die Fundamentalgruppe π von X ist Faktorgruppe von F : $\pi = F / R$. Ferner gilt:

$$H_2(\pi) = (R \cap (F, F)) / (F, R)$$

(Siehe § 5). Die "abelsch gemachte Fundamentalgruppe" π_a ist ebenfalls eine Faktorgruppe von F : $\pi_a = F / R_a$, und zwar ist R_a der von R und der Kommutatorgruppe (F, F) erzeugte Normalteiler $R \cdot (F, F)$ von F . Es gilt:

$$H_2(\pi_a) = (R \cdot (F, F) \cap (F, F)) / (F, (F, F) \cdot R).$$

Die Gruppen (F, R) und $R \cap (F, F)$ sind Untergruppen von $(F, R \cdot (F, F))$ bzw. $R \cdot (F, F) \cap (F, F)$ und wir erhalten das folgende kommutative Diagramm mit exakten Reihen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow & (F, R) & \xrightarrow{\alpha} & R \cap (F, F) & \xrightarrow{\gamma} & H_2(\pi) \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow \beta' \\
 0 \rightarrow & (F, R \cdot (F, F)) & \xrightarrow{j} & R \cdot (F, F) \cap (F, F) & \xrightarrow{\gamma'} & H_2(\pi_a) \rightarrow 0
 \end{array}$$

Hieraus folgt: $\ker(\beta') = \ker(\beta' \gamma) / \text{im}(\alpha)$

$$\begin{aligned}
 &= \ker(\gamma' i) / \text{im}(\alpha) \\
 &= (\text{im}(i) \cap \text{im}(j)) / \text{im}(\alpha) \\
 &= (R \cap (F, R \cdot (F, F))) / (F, R) \\
 &= (R \cap (F, (F, F))) / (F, R)
 \end{aligned}$$

Eine Klasse aus $H_2(\pi)$ gehört also genau dann zum Kern von β' , wenn sie einen 2-Zyklus enthält, der von einem Element aus $(F, (F, F))$ aufgespannt wird.

11.4 Als Ergebnis der vorangehenden Überlegungen halten wir folgenden Satz fest:

SATZ VIII: Zu einem Divisor D in einer komplex-analytischen Mannigfaltigkeit X gibt es höchstens dann eine Thetafunktion, wenn

- (1) die Schnittzahlen des Divisors mit allen 2-Sphären in X verschwinden,
- (2) die Schnittzahlen des Divisors D mit denjenigen 2-Zykeln in X verschwinden, die einen stetigen Homotopierand der Gestalt

$$\alpha_1 \kappa_1 \alpha_1^{-1} \kappa_1^{-1} \dots \alpha_r \kappa_r \alpha_r^{-1} \kappa_r^{-1}$$

haben ($\kappa_i = \beta_i \gamma_i \beta_i^{-1} \gamma_i^{-1}$, die $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ seien geschlossene Wege in X).

Die Bedingungen (1) und (2) sind zusammen auch hinreichend, wenn $H^1(X, \mathcal{O})$ und $H^1(\hat{X}, \mathcal{O})$ Null sind.

11.5 Zusatz: X sei eine komplex-analytische Mannigfaltigkeit mit $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ und $H^1(\hat{X}, \mathcal{O}) = 0$. D sei ein Divisor in X , der eine Thetafunktion zur Lösung hat. Dann existiert zu D auch eine Thetafunktion F , deren Automorphiefaktoren $\frac{\alpha F}{F}$ bei Fortsetzen längs geschlossener Wege (in X) Einheitswurzeln als Faktoren aufnehmen. Ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ endlich-erzeugt, so sind alle diese Einheitswurzeln Potenzen einer geeigneten Einheitswurzel. Es gibt also in diesem Fall eine natürliche Zahl n , sodass F^n multiplikativ automorph ist.

B e w e i s: Der Divisor D definiere die Kohomologieklassse $h(D) \in H^2(\pi, \mathbb{Z})$ und den Homomorphismus $s(D)$ aus $\text{Hom}(H_2(\pi), \mathbb{Z})$, der das Schnittverhalten von D mit den 2-dimensionalen Zykeln in X beschreibt. $s(D)$ verschwindet auf der Untergruppe $(R \cap (F, (F, F))) / (F, R)$ von $H_2(\pi)$, dem Kern von $\beta': H_2(\pi) \rightarrow H_2(\pi_a)$. Wie in 11.2 erkennt man, dass dann ein rationalzahliger Homomorphismus $s_1: H_2(\pi_a) \rightarrow \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ bezeichne jetzt den Körper der rationalen Zahlen) mit $S = s_1 \beta'$ existiert. Nach Satz 4.4 zerfällt also $\alpha(h(D))$ (α sei der Homomorphismus $H^2(\pi, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\pi, \mathbb{Q})$): $\alpha(h(D)) = \sum_{\mu} h_{\mu}^1 \cup k_{\mu}^1$ ($h_{\mu}^1, k_{\mu}^1 \in H^1(\pi, \mathbb{Q})$). Mit Hilfe dieser Darstellung von $\alpha(h(D))$ kann nach dem Vorbild von 8.3 zu (B) und (C) aus § 6 eine Lösung gefunden werden, welche zu einer Thetafunktion führt, deren Automorphiefaktoren Einheitswurzeln als Periodizitätsmoduln haben.

Damit ist die erste Behauptung bewiesen. Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus der ersten.

Aus dem soeben gegebenen Beweis folgt eine Verschärfung der Sätze I und II: Beide bleiben richtig, wenn unter $H(D)$ nicht wie bisher das Bildelement von $h(D)$ unter $H^2(X, Z) \rightarrow H^2(X, R)$ ($R = \text{Körper der reellen Zahlen}$) sondern das Bild unter $H^2(X, Z) \rightarrow H^2(X, Q)$ ($Q = \text{Körper der rationalen Zahlen}$) verstanden wird.

11.6 Die notwendigen und hinreichenden Kriterien des § 8 für die Existenz einer Thetafunktion (m.a.Funktion) zu vorgegebenem Divisor D in X können auf Grund bekannter Dualitätsbeziehungen auf den Schnitttring der Homologieklassen übertragen werden. Dabei entsprechen zwei Kohomologieklassen $h^1, k^1 \in H^1(X, Q)$ $(2n-1)$ -dimensionale rationalzahlige Homologieklassen 2.Art U', W' ($n = \text{komplexe Dimension von } X$) und dem Cup-Produkt $h^1 \cup k^1$ die Schnittklasse $U' \cap W'$. Da $h(D)$ die duale Klasse des durch D gegebenen $(2n-2)$ -dimensionalen Zyklus V_D ist (vgl. Serre(13)), folgt:

SATZ IX: Ist X eine komplex-analytische Mannigfaltigkeit und D ein Divisor in ihr, so gilt: Zu D gibt es höchstens dann eine Thetafunktion (m.a.Funktion), wenn rationalzahlige (ganzzahlige) $(2n-1)$ -dimensionale Zykeln 2.Art U_μ, W_μ in X existieren, sodass

$$V_D \sim \bigcup_{\mu} U_{\mu} \cap W_{\mu}$$

(Der Koeffizientenbereich für die Homologie $\sim$ ist der Körper der rationalen Zahlen). Diese Bedingung reicht auch hin, wenn $H^1(X, \mathcal{O})$ und $H^1(\hat{X}, \mathcal{O})$ verschwinden.

Schon Kodaira bewies, dass dieses Kriterium im Fall kompakter Kählermannigfaltigkeiten hinreicht (vgl.(9)).

11.7 Eine Schnittzahlformel:

Z sei ein 2-dimensionaler ganzzahliger Zyklus in dem m -dimensionalen Komplex X . Z werde von $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_r b_r a_r^{-1} b_r^{-1} \in R(F, F)$ aufgespannt. Sind U und W zwei rationalzahlige $(m-1)$ -dimensionale Zykeln in X , so gilt nach H. Hopf (7), Formel (6), S. 290) für die Schnittzahl $s_{U \cap W}(Z)$ von $U \cap W$ mit Z

$$s_{U \cap W}(Z) = \sum_{i=1}^r [u(a'_i)v(b'_i) - u(b'_i)v(a'_i)]$$

Dabei sind u und v rationalzahlige Homomorphismen auf $\pi_1(X)$, welche - aufgefasst als Kozykeln aus $Z^1(\pi_1(X), Q)$ die dualen Klassen von U und W repräsentieren. Die a'_i und b'_i sind die Bildelemente von a_i und b_i in $\pi_1(X)$ unter dem Homomorphismus $F \rightarrow \pi_1(X)$.

Es sei nun X eine komplex-analytische Mannigfaltigkeit und D ein Divisor in ihr, der durch eine Thetafunktion gelöst werden kann. Dann zerfällt die D zugeordnete Kohomologieklass $H(D) \in H^2(X, Q)$. Für einen $H(D)$ repräsentierenden Kozyklus r gilt also:

$$r(\alpha, \beta) = \sum_{\mu} u_{\mu}(\alpha) v_{\mu}(\beta) + d(\beta) - d(\alpha\beta) + d(\alpha)$$

Wegen 11.6 ergibt sich also für die Schnittzahl von D mit dem Zyklus Z folgende Formel:

$$s(D, Z) = \sum_{\mu} \sum_{i=1}^r [u_{\mu}(a'_i) v_{\mu}(b'_i) - u_{\mu}(b'_i) v_{\mu}(a'_i)]$$

11.8 Anwendungen der Schnittzahlformel:

(a) Es sei X eine komplex-analytische Mannigfaltigkeit mit abelscher Fundamentalgruppe und D sei ein Divisor in X , der auf der universellen Überlage-

zung $\hat{X}$ gelöst werden kann. Wir wissen bereits, dass die Schnittzahlen von D mit den 2-Sphären in X verschwinden müssen. Die Schnittzahlen mit den übrigen 2-Zykeln Z in X lassen sich leicht mit Hilfe der Logarithmen g_α der Automorphiefaktoren $\frac{\alpha G}{G}$ einer Lösungsfunktion G von $\hat{D}$ angeben. Es gilt nämlich (vgl. § 6.4 und Satz 4.9):

$$g_{\alpha\beta} + 2\pi i \left(\sum_{\mu} u_{\mu}(\alpha) v_{\mu}(\beta) + d(\beta) - d(\alpha\beta) + d(\beta) \right) = \alpha g_{\beta} + g_{\alpha}$$

Also:

$$\sum_{\mu} [u_{\mu}(\alpha) v_{\mu}(\beta) - u_{\mu}(\beta) v_{\mu}(\alpha)] = \frac{1}{2\pi i} [(\alpha g_{\beta} - g_{\beta}) - (\beta g_{\alpha} - g_{\alpha})]$$

Die Schnittzahl von D mit einem Zyklus Z , der von $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_r b_r a_r^{-1} b_r^{-1} \in R \cap (F, F)$ aufgespannt wird, ist also durch folgende Summe von Doppeldifferenzen gegeben:

$$s(D, Z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^r [(\alpha_j g_{\beta_j} - g_{\beta_j}) - (\beta_j g_{\alpha_j} - g_{\alpha_j})]$$

Dabei sind die α_j und β_j die Bilder der a_j und b_j bei dem Homomorphismus $F \rightarrow \pi_1(X)$.

(b) Im direkten Produkt $X \times Y$ zweier komplex-analytischer Mannigfaltigkeiten sei ein durch eine Thetafunktion G lösbarer Divisor D gegeben. Die Homotopieklassen $a \in \pi_1(X)$ und $\beta \in \pi_1(Y)$ seien durch die Wege $w_a \subset X$ und $w_{\beta} \subset Y$ repräsentiert. Die Schnittzahl von D mit dem Torus $w_a \times w_{\beta} \subset X \times Y$ ist dann nach § 10 (Bezeichnungen wie dort) und § 11.7 durch folgende Formel gegeben:

$$s(D, w_a \times w_{\beta}) = r(a, \beta) = \frac{1}{2\pi i} [(\alpha g_{\beta} - g_{\beta}) - (\beta g_a - g_a)]$$

Für den normalen Kozyklus r , der $h(D) \in H^2(\pi_1(X \times Y), Z)$

repräsentiert, gilt nämlich:

$$r(\beta, \alpha) = r(\beta, 1) + r(1, 1) + r(1, \alpha) = 0,$$

weil ein normaler Kozyklus immer normalisiert ist.

Es seien nun X und Y Stein'sche Mannigfaltigkeiten mit $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$ und $H^2(Y, \mathbb{Z}) = 0$. Nach Satz VII existiert zu jedem Divisor D in $X \times Y$ eine multiplikative automorphe Lösungsfunktion F , welche bei Fortsetzung in X eindeutig bleibt und die bei Fortsetzung längs eines geschlossenen Weges in Y einen Faktor $e^{f_\alpha^*(x)}$ aufnimmt. Die in § 10 gegebene Konstruktion von F zeigt, dass $f_\alpha^*(x) \equiv 0$ gewählt werden kann ($\alpha \in \pi_1(Y)$), wenn $r(a, \beta) = 0$ für alle $a \in \pi_1(X)$ und $\beta \in \pi_1(Y)$, d.h. wenn die Schnittzahlen von D mit allen Torusflächen $w_a \times w_\beta$ Null sind. In diesem Fall ist F eindeutig in $X \times Y$. Da diese Bedingung für die Existenz einer eindeutigen Lösungsfunktion zu D auch notwendig ist (vgl. (14)), gilt somit:

SATZ X: Zu einem Divisor D in einem direkten Produkt $X \times Y$ zweier Stein'scher Mannigfaltigkeiten X, Y mit $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$ und $H^2(Y, \mathbb{Z}) = 0$ existiert dann und nur dann eine eindeutige Lösungsfunktion, wenn die Schnittzahlen von D mit den Torusflächen $w_a \times w_\beta$ in $X \times Y$ sämtlich verschwinden.

Dieser Satz gestattet eine Verallgemeinerung, deren Beweis analog läuft. Wir formulieren deshalb nur das Ergebnis:

SATZ Xa: D sei der Divisor einer Thetafunktion G

im direkten Produkt $X_1 \times \dots \times X_n$ der komplex-analytischen Mannigfaltigkeiten X_i .

Die Schnittzahl von D mit den Torusflächen $w_{\alpha_i} \times w_{\alpha_j}$ ($i < j$) ist durch folgende Doppeldifferenz gegeben:

$$s(D, w_{\alpha_i} \times w_{\alpha_j}) = \frac{1}{2\pi i} \left[(\alpha_i g_{\alpha_j} - g_{\alpha_j}) - (\alpha_j g_{\alpha_i} - g_{\alpha_i}) \right]$$

(Hierin soll der geschlossene Weg $w_{\alpha_k} \subset X_k$ die Homotopieklasse $\alpha_k \in \pi_1(X_k)$ repräsentieren. g_{α_k} sei ein 'Zweig des Logarithmus' des Automorphiefaktors $\frac{\alpha_k G}{G}$.)

Sind die X_i Stein'sche Mannigfaltigkeiten mit $H^2(X_i, \mathbb{Z}) = 0$, so gilt darüberhinaus: D ist genau dann der Divisor einer eindeutigen meromorphen Funktion in $X_1 \times \dots \times X_n$, wenn die Schnittzahlen von D mit den Torusflächen $w_{\alpha_i} \times w_{\alpha_j}$ sämtlich verschwinden.

Literaturverzeichnis

- (1) H.Cartan: Variétés analytiques complexes et cohomologie, in Colloque sur les Fonctions De Plusieurs Variables, Brüssel 1953
- (1a) H.Cartan: Séminaire 1951/52, Paris
- (2) H.Cartan - S.Eilenberg: Homological Algebra
- (3) P.Dolbeault: Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe, I Annals of Math., Band 64
- (4) B.Eckmann: Der Kohomologiering einer beliebigen Gruppe, Comm. Math. Helv., Band 18
- (5) S.Eilenberg: Topological Methods in Abstract Algebra, Bull. of Am. Math. Soc., Bd 55 S. 3-33
- (6) S.Eilenberg - S.MacLane: Relations between homology and homotopy groups of spaces, Annals of Math., Band 46, S. 480
- (6a) S.Eilenberg - S.MacLane: Cohomology theorie in abstract groups, Annals of Math., Bd 48 S. 51
- (7) H.Hopf: Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe, Comm. Math. Helv., Band 14 S. 257
- (7a) H.Hopf: Über die Bettischen Gruppen, die zu einer beliebigen Gruppe gehören, Comm. Math. Helv., Bd 17
- (8) I.Kaplansky: Infinite Abelian Groups
- (9) K.Kodaira: Kapitel V der Vorlesungen von

G. De Rham über harmonische Integrale,
Princeton 1950.

- (10) S.Lefschetz: Algebraic Topology, Kapitel VIII
- 11) R.Lyndon: The cohomology theory of group extensions, Duke Math. Journal, Band 14 S. 271
- (11a) R.Lyndon: Cohomology theory of Groups with a single defining relation, Annals of Math., Band 52 S. 650
- (12) K.Oka: Deuxième Problème de Cousin, Journal of Science of the Hiroshima University, 1939, S. 7 - 19.
- (13) J.P.Serre: Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein, in Colloque sur les Fonctions De Plusieurs Variables, Brüssel 1953
- (14) K.Stein: Topologische Bedingungen für die Existenz analytischer Funktionen komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Nullstellen, Math. Annalen, Band 117
- (14a) K.Stein: Primfunktionen und multiplikative automorphe Funktionen auf nicht-geschlossenen Riemann'schen Flächen, Acta Math., Band 83
- (14b) K.Stein: Analytische Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousin'sche Problem, Math. Annalen, Band 123

Lebenslauf

Am 22. Februar 1936 bin ich in Deggenau als ältester der beiden Söhne des Gärtners Johann Königsberger und seiner Ehefrau Maria, geb. Freund, geboren. Ich gehöre zur römisch-katholischen Kirche.

Von 1942 bis 1946 besuchte ich die Volksschule in Neuaubing. Im Mai 1946 trat ich in das Internat Schweiklberg bei Vilshofen ein und besuchte dort die ersten fünf Klassen des angegliederten Gymnasiums. 1951 trat ich dann in das humanistische Gymnasium in Pasing über und absolvierte dort im Juli 1954 die Reifeprüfung.

Seit November 1954 bin ich ordentlicher Studierender der Mathematik und Physik an der Universität München. Ich hörte Vorlesungen bei G. Aumann, F. Bopp, W. Gerlach, W. Heisenberg, M. Kneser, W. Maak, O. Perron, H. Röhrl, R. Schmidt, K. Seebach und K. Stein.

Nachdem ich einige Semester als Hilfsassistent beschäftigt war, wurde ich am 1.10.59 mit der Verwaltung der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten am Mathematischen Institut der Universität München betraut.

Juni 1960

Konrad Königsberger

